

Стандартная космологическая модель

Д.И.Нагирнер (СПбГУ)

02.12.2015

Контрольные вопросы

- ▶ Чему равно хаббловское расстояние?
- ▶ На каком расстоянии от нас находится горизонт?
- ▶ Какова скорость расширения горизонта и у горизонта?
- ▶ Чему равно ускорение на хаббловском расстоянии и на горизонте?
- ▶ Когда началось ускорение, при каком z ?
- ▶ Что произойдет со Вселенной в далеком будущем?
- ▶ Что такое вторая инфляция и второй горизонт?
- ▶ До каких расстояний, в принципе, может дойти сигнал к внеземным цивилизациям? С каких расстояний они смогут ответить?

1. Основания модели

Основные предположения

- ▶ Уравнения Эйнштейна.
- ▶ Космологический принцип: все во Вселенной в каждый фиксированный момент однородно и изотропно.
- ▶ Плоское пространство.

Основные величины

- ▶ Масштабный множитель (фактор) a .
- ▶ Космологическое красное смещение z , $a = 1/(1+z)$.
- ▶ Постоянная Хаббла H_0 , хаббловское расстояние $l_H^0 = \frac{c}{H_0}$.
- ▶ Метрика Фридмана—Робертсона—Уокера
 $ds^2 = c^2 dt^2 - dl^2$, $dl^2 = dr^2 + r^2 d\omega^2$, $d\omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2$.
- ▶ Конформные временная и пространственная координаты: $c dt = \frac{c}{H_0} a(\eta) d\eta$, $r = \frac{c}{H_0} a(\eta) \chi$, метрики в них

$$dl^2 = \frac{c^2}{H_0^2} a^2(\eta) [d\chi^2 + \chi^2 d\omega^2], \quad ds^2 = \frac{c^2}{H_0^2} a^2(\eta) [d\eta^2 - d\chi^2 - \chi^2 d\omega^2].$$

Компоненты и их доли

- ▶ Пылевидное вещество, включая барионное и темное, Ω_d .
- ▶ Излучение, Ω_r .
- ▶ Релятивистские нейтрино и антинейтрино трех типов, общая доля Ω_ν .
- ▶ Темная энергия (вакуум), Ω_Λ , $\Omega_d + \Omega_r + \Omega_\nu + \Omega_\Lambda = 1$.

Параметры модели

- ▶ Постоянная Хаббла $H_0 = 70 \text{ км с}^{-1} \text{ Мпк}^{-1} = 2.27 \cdot 10^{-18} \text{ с}^{-1}$.
- ▶ Хаббловское расстояние l_H^0 : $v = H_0 l$, $v = c = H_0 l_H^0$,
 $l_H^0 = \frac{c}{H_0} = 1.32 \cdot 10^{28} \text{ см} = 14.2 \text{ Г св. лет} = 4.28 \text{ Гпк}$.
- ▶ Критическая плотность $\rho_c^0 = \frac{3H_0^2}{8\pi G} = 9.21 \cdot 10^{-30} \text{ г/см}^3$.

Плотности массы компонент и их современные доли

- ▶ Реликтовое чернотельное излучение, $T_0 = 2.7277$ К,
 $\rho_{\text{r}}^0 = \frac{a_{\text{SB}}}{c^2} T_0^4 = 4.66 \cdot 10^{-34}$ г/см³, $\Omega_{\text{r}}^0 = 5.06 \cdot 10^{-5}$.

Концентрация фотонов $n_{\text{r}}^0 = 16\pi\zeta(3) \left(\frac{k_{\text{B}}}{hc}\right)^3 T_0^3 = 411$ 1/см³.

- ▶ Ультрарелятивистские нейтрино всех типов, $T_{\nu} = \sqrt{\frac{4}{11}} T_{\text{r}}$,

$$\rho_{\nu}^0 = 6 \frac{7}{8} \frac{a_{\text{SB}}}{c^2} (T_{\nu}^0)^4 = 1.36 \rho_{\text{r}}^0, \quad \Omega_{\nu}^0 = 1.36 \Omega_{\text{r}}^0 = 6.90 \cdot 10^{-5}.$$

- ▶ Темная энергия, $\Omega_{\Lambda}^0 = 0.72$, $\rho_{\Lambda}^0 = 6.62 \cdot 10^{-30}$ г/см³.

- ▶ Пылевидное вещество $\Omega_{\text{d}}^0 = 1 - \Omega_{\text{r}}^0 - \Omega_{\nu}^0 - \Omega_{\Lambda}^0 = 0.280$,
 $\rho_{\text{d}}^0 = 2.58 \cdot 10^{-30}$ г/см³.

- ▶ В атомах водорода в м³: $\frac{\rho_{\text{c}}^0}{m_{\text{H}}} \cdot 10^6 = 5.50$, $\frac{\rho_{\Lambda}^0}{m_{\text{H}}} \cdot 10^6 = 3.96$,

$$\frac{\rho_{\text{d}}^0}{m_{\text{H}}} \cdot 10^6 = 1.54, \quad \frac{\rho_{\text{r}}^0}{m_{\text{H}}} \cdot 10^6 = 0.00028, \quad \frac{\rho_{\nu}^0}{m_{\text{H}}} \cdot 10^6 = 0.00038.$$

2. Основные уравнения

$$\ddot{R} = -\frac{4\pi G}{3} \left(\rho + 3\frac{P}{c^2} \right) R + \frac{\Lambda c^2}{3} R, \quad \dot{R}^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho R^2 + \frac{\Lambda c^2}{3} R^2 - kc^2. \quad (1)$$

Для плоского пространства $k = 0$, $R(t) = \frac{c}{H_0} a(\eta)$. Условие совместности уравнений $\dot{\rho} = -3 \left(\rho_t + \frac{P_t}{c^2} \right) H$, $H = \frac{\dot{R}}{R} = \frac{\dot{a}}{a}$. Физический смысл условия $d(\rho_t c^2 V) = -P_t dV$ — адиабата. Вводятся полные плотность и давление четырех компонент, а также гравитирующая (гравитационная) плотность:

$$\rho_t = \rho_d + \rho_r + \rho_\nu + \rho_\Lambda = \rho_c, \quad P_t = P_d + P_r + P_\nu + P_\Lambda, \quad \rho_g = \rho_t + 3\frac{P_t}{c^2}. \quad (2)$$

Плотность и давление темной энергии $\rho_\Lambda = \frac{\Lambda c^2}{8\pi G}$, $P_\Lambda = -\frac{\Lambda c^4}{8\pi G}$.

$$\text{Уравнения для } a: \quad \ddot{a} = -\frac{4\pi G}{3} \rho_g a, \quad \dot{a}^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho_t a^2. \quad (3)$$

3. Эволюция плотностей

- ▶ Компоненты не взаимодействуют после аннигиляции электрон-позитронных пар.
- ▶ Излучение и нейтрино $\rho_r + \rho_\nu = \rho_{r\nu}$, $P_r + P_\nu = P_{r\nu}$.
- ▶ Уравнения состояния: $P_d = 0$, $P_{r\nu} = \frac{\rho_{r\nu} c^2}{3}$, $P_\Lambda = -\rho_\Lambda c^2$.
- ▶ Гравитационная плотность $\rho_g = \rho_d + 2\rho_{r\nu} - 2\rho_\Lambda$.
- ▶ Условия совместности отдельно для каждой компоненты: $\dot{\rho}_d = -3\rho_d$, $\dot{\rho}_{r\nu} = -4\rho_{r\nu}$, $\dot{\rho}_\Lambda = 0$.
- ▶ Эволюция: $\rho_d = \frac{\rho_d^0}{a^3}$, $\rho_{r\nu} = \frac{\rho_{r\nu}^0}{a^4}$, $\rho_\Lambda = \rho_\Lambda^0$.
- ▶ Замена: $\rho_d^0 = \Omega_d^0 \rho_c^0$, $\rho_{r\nu}^0 = \Omega_{r\nu}^0 \rho_c^0$, $\rho_\Lambda^0 = \Omega_\Lambda^0 \rho_c^0$.
- ▶ $\rho_t = \rho_c^0 \left(\frac{\Omega_d^0}{a^3} + \frac{\Omega_{r\nu}^0}{a^4} + \Omega_\Lambda^0 \right)$, $\rho_g = \rho_c^0 \left(\frac{\Omega_d^0}{a^3} + 2\frac{\Omega_{r\nu}^0}{a^4} - 2\Omega_\Lambda^0 \right)$.

4. Решение уравнений

- ▶ Уравнение с первой производной

$$H^2 = \frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3} \rho_c^0 \left(\frac{\Omega_d^0}{a^3} + \frac{\Omega_{r\nu}^0}{a^4} + \Omega_\Lambda^0 \right) = \frac{H_0^2}{a^4} (\Omega_{r\nu}^0 + \Omega_d^0 a + \Omega_\Lambda^0 a^4). \quad (4)$$

- ▶ Разделение переменных

$$\frac{ada}{\sqrt{\Omega_{r\nu}^0 + \Omega_d^0 a + \Omega_\Lambda^0 a^4}} = H_0 dt, \int_0^a \frac{ada}{\sqrt{\Omega_{r\nu}^0 + \Omega_d^0 a + \Omega_\Lambda^0 a^4}} = H_0 t, \quad (5)$$

$$H_0 dt = a d\eta, \int_0^a \frac{da}{\sqrt{\Omega_{r\nu}^0 + \Omega_d^0 a + \Omega_\Lambda^0 a^4}} = \eta. \quad (6)$$

- ▶ Замена: $x_0 = \left(\frac{\Omega_\Lambda^0}{\Omega_{r\nu}^0} \right)^{1/4} = 8.81$, $\beta = \frac{\Omega_d^0}{(\Omega_{r\nu}^0)^{3/4} (\Omega_\Lambda^0)^{1/4}} = 265.7$,

$$H_* = H_0 \sqrt{\Omega_\Lambda^0} = 59.4 \text{ км с}^{-1} \text{ Мпк}^{-1} = 1.92 \cdot 10^{-18} \text{ с}^{-1},$$

$$t_* = 1/H_* = 5.20 \cdot 10^{17} \text{ 1/с} = 16.5 \text{ Гигалет}, \quad x = x_0 a.$$

5. Свойства решений

- ▶ Решения в новых переменных: $\eta_* = (\Omega_{\text{r}\nu}^0 \Omega_{\Lambda}^0)^{-1/4} = 10.4$,

$$t = t_* I_1(x, \beta), \quad \eta = \eta_* I_0(x, \beta), \quad I_j(x, \beta) = \int_0^x \frac{x^j dx}{\sqrt{1 + \beta x + x^4}}. \quad (7)$$

- ▶ Современные возраст Вселенной и координата:

$$t_0 = t_* I_1(x_0, \beta) = 13.7 \text{ Гигалет}, \quad \eta_0 = \eta_* I_0(x_0, \beta) = 3.63. \quad (8)$$

- ▶ Предел координаты $\eta_{\infty} = \eta_* I_0(\infty, \beta) = 4.45$.
- ▶ Приближенные выражения:

$$x < 1, \quad I_0(x, \beta) \approx \frac{2x}{\sqrt{1 + \beta x + 1}}, \quad I_1(x, \beta) \approx \frac{2}{3} \frac{x^2 (\sqrt{1 + \beta x + 2})}{(\sqrt{1 + \beta x + 1})^2},$$

$$x > 1, \quad I_0(x, \beta) \approx 2 \sqrt{\frac{x}{\beta}} F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{7}{6}, -\frac{x^3}{\beta}\right), \quad I_1(x, \beta) \approx \frac{2}{3} \operatorname{arsh} \sqrt{\frac{x^3}{\beta}}.$$

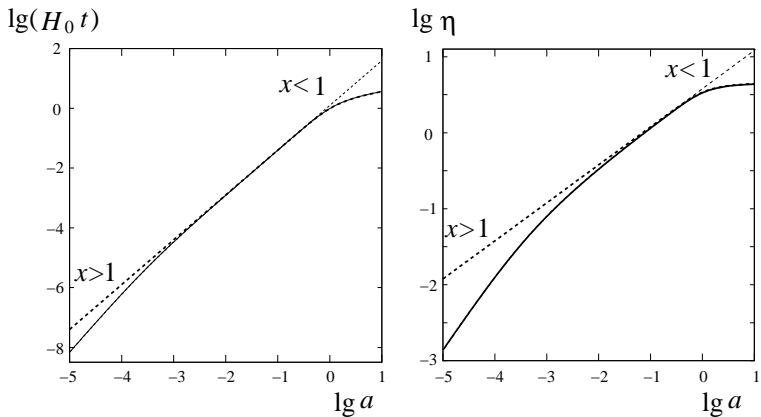


Рис. 1. Точные и приближенные зависимости $H_0 t$ и η от a .

6. Роли компонент в различные эпохи

- ▶ Отношения плотностей зависят от z так:

$$\frac{\rho_{\text{r}\nu}}{\rho_{\text{d}}} = (1+z) \frac{\rho_{\text{r}\nu}^0}{\rho_{\text{d}}^0}, \quad \frac{\rho_{\text{d}}}{\rho_{\Lambda}} = (1+z)^3 \frac{\rho_{\text{d}}^0}{\rho_{\Lambda}^0}, \quad \frac{\rho_{\text{r}\nu}}{\rho_{\Lambda}} = (1+z)^4 \frac{\rho_{\text{r}}^0}{\rho_{\Lambda}^0}. \quad (9)$$

- ▶ Полная и гравитирующая плотности

$$\rho_t = \rho_{\text{d}} + \rho_{\text{r}\nu} + \rho_{\Lambda}, \quad \rho_{\text{g}} = \rho_{\text{d}} + 2\rho_{\text{r}\nu} - 2\rho_{\Lambda}. \quad (10)$$

- ▶ Таблица 1. Эпохи равенства плотностей и сил

Эпоха	z	t/t_0	t Гигалет	$t_0 - t$
$\rho_{\text{d}} = \rho_{\text{r}\nu}$	2340	$1.83 \cdot 10^{-6}$	$2.50 \cdot 10^{-5}$	13.7
$\rho_{\text{d}} = 2\rho_{\text{r}\nu}$	1170	$6.23 \cdot 10^{-6}$	$8.56 \cdot 10^{-5}$	13.7
$\rho_{\text{r}\nu} = \rho_{\Lambda}$	7.809	0.0354	0.486	13.2
$\rho_{\text{d}} = 2\rho_{\Lambda}$	0.7264	0.5263	7.224	6.5
$\rho_{\text{g}} = 0$	0.7260	0.5264	7.226	6.5
$\rho_{\text{d}} = \rho_{\Lambda}$	0.3702	0.7050	9.67	4.0
Соврем.	0	1	13.7	0

- ▶ Эпохи, когда $\rho_{\text{d}} = 2\rho_{\Lambda}$ и $\rho_{\text{g}} = 0$ почти совпадают, так как плотности излучения и нейтрино малы.

7. Излучение в космологии

- ▶ Уравнение движения фотона.
Луч $\theta = \theta_0$, $\varphi = \varphi_0$ (тогда $d\omega = 0$). Из $ds = 0$ следует, что $d\eta^2 = d\chi^2$. Движение к нам: $\chi = \eta_0 - \eta$, от нас: $\chi = \eta_e + \eta$, η_e — момент старта фотона.
- ▶ Если фотон испущен в момент η_e в месте с координатой χ_e к нам, то $\chi_e = \eta_0 - \eta_e$. Так как $\eta_e \geq 0$, то $\chi_e \leq \eta_0$.
- ▶ $\chi_e = \eta_0$ — максимальное значение: фотоны, идущие к нам из мест, координаты которых больше, еще не успели дойти до нас.
- ▶ Горизонт — это сфера, ее уравнение $\chi = \eta_0$. Расстояние до горизонта (радиус сферы) $l_H^0 \eta_0 = 15.5$ Гпк. В произвольную эпоху $\chi = \eta$.
- ▶ С течением времени горизонт расширяется.

8. Расстояния, скорости, ускорения

- ▶ Метрическое расстояние: $dl^2 = l_H^0 a^2(\eta)[d\chi^2 + \chi^2 d^2\omega^2]$, луч $\theta = \theta_0, \varphi = \varphi_0, d\omega = 0, dl = l_H^0 a(\eta) d\chi, l = l_H^0 a(\eta) \chi$, современное $l_0 = l_H^0 \chi$.
- ▶ Закон Хаббла: $v = \dot{l} = \dot{a}\chi = \frac{\dot{a}}{a}\chi = Hl, v = H_0 l$.
- ▶ Связь с z : $\frac{v}{c} = H_0 \int_0^z \frac{dz}{H}, \frac{v}{c} \approx H_0 z$ только при $z \ll 1$.

Доплер $\sqrt{\frac{1+v/c}{1-v/c}} = 1+z, \frac{v}{c} = z \frac{2+z}{2+2z+z^2} < 1$.

- ▶ Расстояния: по угловому размеру l_{ad} , по параллаксу l_{pl} , по числу фотонов l_{nb} , по болометрической яркости l_{bb} .

$$l_{bb} = l_{nb} \sqrt{1+z} = l_{pl}(1+z) = l_{ad}(1+z)^2, \quad (11)$$

$$l_{pl} = l_H^0 \chi(z), \quad \chi(z) = \eta_0 - \eta = \eta_* \int_{x_0/(1+z)}^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{1+\beta x+x^4}}. \quad (12)$$

- ▶ Так как $x = \frac{x_0}{1+z}$, $dz = -\frac{x_0}{x^2}$, то скорость

$$\frac{v}{c} = H_0 \int_0^z \frac{dz}{H} = \eta_* \int_x^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{1+\beta x+x^4}} = \eta_0 - \eta = \frac{l_{\text{pl}}}{l_{\text{H}}^0}.$$

- ▶ Расстояние до горизонта: сейчас $l_{\text{Hor}}^0 = l_{\text{H}}^0 \eta_0 = 15.5$ Гпк,
 $l_{\text{Hor}} = l_{\text{H}}^0 a(\eta) \eta = l_{\text{H}}^0 a \eta_* I_0(x_0 a, \beta) = \frac{c}{H_*} x I_0(x, \beta)$ в момент η .
- ▶ Скорость расширения горизонта:

$$v_{\text{Hor}} = \dot{l}_{\text{Hor}} = l_{\text{H}}^0 (\dot{a}\eta + a\dot{\eta}) = \frac{\dot{a}}{a} l_{\text{Hor}} + l_{\text{H}}^0 a \frac{c}{l_{\text{H}}^0 a} = H l_{\text{Hor}} + c. \quad (13)$$

Сейчас $v_{\text{Hor}}^0 = H_0 l_{\text{Hor}}^0 + c = (\eta_0 + 1)c = (3.63 + 1)c = 4.63c$,
 за 1 год проходит 4.63 св. лет, 1 Гпк - за 0.7 Г лет.

- ▶ Ускорение: $l = l_{\text{H}}^0 a \chi$, $\dot{l} = v = l_{\text{H}}^0 \dot{a} \chi = H l$, $\ddot{a} = -\frac{4\pi G}{3} \rho_g a$,

$$\ddot{l} = \dot{v} = l_{\text{H}}^0 \ddot{a} \chi = -\frac{4\pi G}{3} \rho_g l, \quad \rho_g = \frac{\rho_{\text{d}}}{a^3} + 2 \frac{\rho_{\text{rv}}}{a^4} - 2\rho_{\Lambda}.$$

- ▶ $\rho_g^0 = -1.07 \cdot 10^{-29}$ г/см³, $\ddot{l}_0 = 2.985 \cdot 10^{-35} l_0$.

На хаббловском $v_0 = c$, $\dot{l}_{\text{H}}^0 = 3.94 \cdot 10^{-8}$ см/с² = 3.94 Å/с²,
 на горизонте $\ddot{l}_0 = 14.3$ Å/с². Порядок $\sim c H_0 = 6.8 \cdot 10^{-8}$ Å/с².

9. Вторая инфляция

- ▶ Ускорение на расстоянии l_H растет и в эпоху t будет

$$\dot{v}_H = - \frac{\Omega_d^0(1+z)^3 + 2\Omega_{\text{r}\nu}^0(1+z)^4 - 2\Omega_\Lambda^0}{\sqrt{\Omega_d^0(1+z)^3 + \Omega_{\text{r}\nu}^0(1+z)^4 + \Omega_\Lambda^0}} \frac{cH_0}{2}. \quad (14)$$

При $t \rightarrow \infty$ $z \rightarrow -1$, $\dot{v}_H \rightarrow H_*c = 5.77 \cdot 10^{-8} \text{ см/с}^2$.

- ▶ При $x > 1$, $z < 10$, $t > 0.5$ Гигалет

$$a \approx \left(\frac{\Omega_d^0}{\Omega_\Lambda^0} \right)^{1/3} \text{sh}^{2/3} \left(\frac{3}{2} H_* t \right) \sim 0.46 e^{H_* t}. \quad (15)$$

- ▶ Реально экспоненциальное расширение начнется только, когда $t > \frac{1}{H_*} = t_* = 16.5$ Г лет.

При первой инфляции $H_* = 5 \cdot 10^{43} 1/\text{с}$, $\Lambda = 9.6 \cdot 10^{66} 1/\text{с}^2$.

При второй инфляции $H_* = 1.92 \cdot 10^{-18} 1/\text{с}$,

$\Lambda = 1.24 \cdot 10^{-56} 1/\text{с}^2$.

10. Второй горизонт

- ▶ Уравнение движения фотона $\chi = \eta_0 - \eta$,
 $\chi_e = \eta_0 - \eta_e < \eta_0$, $\chi = \chi_e + \eta_e - \eta$.
- ▶ Расстояние от наблюдателя до фотона, идущего к нему:

$$l_{rs} = l_H^0 a(\eta)(\eta_0 - \eta) = l_H^0 a(\eta)(\chi_e + \eta_e - \eta). \quad (16)$$

Параметр η ограничен: $\eta \leq \eta_\infty = 4.45$ при $t = \infty$.

Обращение $l_{rs} = 0$ возможно только, если $\chi_e + \eta_e < \eta_\infty$.

- ▶ В эпоху η первый и второй горизонты определяются, соответственно, равенствами $\chi = \eta$, $\chi = \eta_\infty - \eta$.
- ▶ Излучение из областей за первым горизонтом не имело достаточно времени, чтобы дойти до наблюдателя. Второй горизонт отделяет области, из которых излучение не может дойти до наблюдателя, так как эти области удаляются со скоростями, превосходящими скорость света, причем эта скорость возрастает.

11. Видимая и невидимая части Вселенной

- ▶ Сейчас мы видим Вселенную до $z \approx 10$. Излучение, испущенное сейчас из мест с $z > 1.72$ никогда до нас не дойдет, то есть даже в бесконечно удаленном будущем.
- ▶ Первый горизонт можно назвать геометрическим горизонтом, физический горизонт — это сфера последнего рассеяния на $z \approx 1000$. Второй горизонт может быть назван кинематическим или динамическим.
- ▶ Горизонты пересеклись, когда $\eta = \eta_\infty/2$, $x = 4.08$, $z = 1.677$, в эпоху $t = 3.93$ Гигалет от начала расширения, то есть $t_0 - t = 9.80$ Гигалет тому назад, когда расстояние до них было 3.58 Гпк.

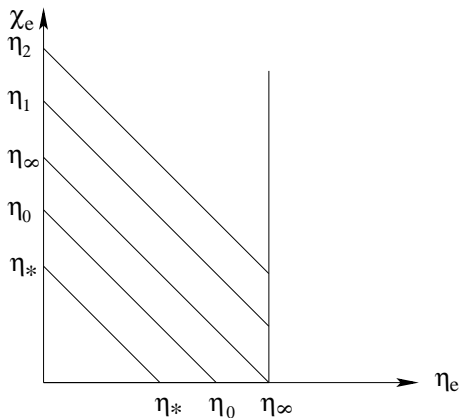


Рис. 2. Видимая и невидимая части Вселенной.

Геометрический горизонт — ось ординат, кинематический — прямая, соединяющая абсциссу и ординату, равные η_∞ .

Фотоны движутся по прямым, параллельным $\chi_e = \eta_0 - \eta_e$.

При $\eta_e + \chi_e < \eta_\infty$ они рано или поздно дойдут до нас, а при $\eta_e + \chi_e > \eta_\infty$ — не дойдут никогда.

12. Связь с внеземными цивилизациями

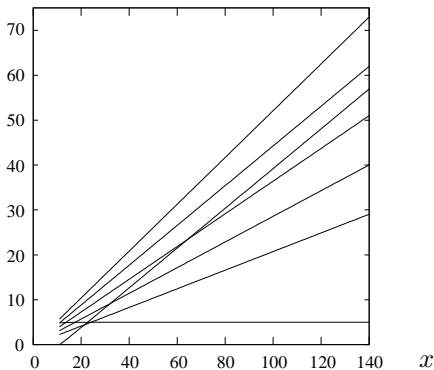


Рис. 3. Путь сигнала к объектам.

Расстояние до испущенного нами сигнала $l_{ph} = l_H^0 a(\eta)(\eta - \eta_0)$.

$l_o = l_H^0 a(\eta) \chi_o$ — расстояние до объекта. Сигнал дойдет, если

$l_{ph} = l_o$, $\chi_o = \eta - \eta_0$. Так как $\eta \leq \eta_\infty$, то $\chi_o \leq \eta_\infty - \eta_0 = \chi_{lim} =$
До второго горизонта дойдет сигнал при $\eta_h - \eta_0 = \eta_\infty - \eta_h$,

$\eta_h = \frac{\eta_0 + \eta_\infty}{2} = 4.04$. Тогда $l_{ph} = 5.02$ Гпк и ответ возможен

при $l_o < 5$ Гпк.