

Представление диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук
Специальность 01.03.01 – астрометрия и небесная механика

Эволюция слабовозмущенной планетной системы на космогонических временах

Д.В. Микрюков

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук, профессор
Холшевников Константин Владиславович

7 октября 2020 г.

Цель диссертации

Цель — разработка численно-аналитического метода и его применение к исследованию орбитальной эволюции близких к круговым и компланарным планетных систем типа Солнечной на космогонических временах.

Примеры: Солнечная система, Kepler-11, HD 12661.

Под космогоническими временами в настоящей работе понимаются такие промежутки времени, порядок которых изменяется в пределах десятка тысяч - десятка миллионов (земных) лет.

Примеры некоторых научных коллективов

Европа: Ж. Ласкар, Ф. Робютель; М. Сансоттера, С. Либер;

Южная Америка: А. Родригес, Т. Гальярдо;

Северная Америка: М. Х. Ли, С. Пил;

Россия (Екатеринбург): А. Перминов, Э. Кузнецов.

Структура диссертации

Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и шести приложений. Объем диссертации — 157 страниц с 17 рисунками и 14 таблицами. Список литературы содержит 98 наименований.

Глава 1. Разложение основных функций кеплеровского движения

Глава 2. Разложение гамильтониана в ряд Пуассона

Глава 3. Построение осредненных уравнений движения

Глава 4. Динамическая эволюция слабовозмущенных планетных систем

Приложения содержат относящийся к первым двум главам вспомогательный материал.

Глава 1.

Основная система оскулирующих элементов

Положим $\text{Exp } \varphi = \exp i\varphi$ для любого $\varphi \in \mathbb{C}$. Комплексная форма канонических элементов Пуанкаре:

$$\begin{aligned}P &= X\sqrt{\Lambda/2}, & p &= -i\bar{P}, \\Q &= Y\sqrt{2\Lambda}, & q &= -i\bar{Q}, \\ \Lambda &= \beta\kappa\sqrt{a}, & \lambda &= M + \tilde{g},\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}X &= \sqrt{2(1-\eta)} \text{Exp } \tilde{g}, \\Y &= \sqrt{\eta(1-\cos i)/2} \text{Exp } \Omega, \\ \eta &= \sqrt{1-e^2}, & \tilde{g} &= g + \Omega.\end{aligned}$$

Другой вариант комплексной формы элементов Пуанкаре — система элементов Пуанкаре–Харцера (Красинский, 1973).

Прямоугольные координаты

$$r_x = r(\cos u \cos \Omega - \sin u \sin \Omega \cos i),$$

$$r_y = r(\cos u \sin \Omega + \sin u \cos \Omega \cos i),$$

$$r_z = r \sin u \sin i.$$

Основная идея (Субботин, 1968): представление аргумента широты u в форме

$$u = (\theta - M) + (\lambda - \Omega).$$

$$\cos \varphi = \frac{r_{1x}r_{2x} + r_{1y}r_{2y} + r_{1z}r_{2z}}{r_1 r_2}.$$

$$r_x/r = \mathcal{Z}_1 \mathcal{K}_1 - \mathcal{Z}_2 \mathcal{K}_2,$$

$$r_y/r = \mathcal{Z}_1 \mathcal{K}_3 + \mathcal{Z}_2 \mathcal{K}_4,$$

$$r_z/r = \mathcal{Z}_1 \mathcal{K}_5 + \mathcal{Z}_2 \mathcal{K}_6,$$

где $\mathcal{Z}_1 = \cos(\theta - M)$ и $\mathcal{Z}_2 = \sin(\theta - M)$.

Прямоугольные компоненты вектора скорости

$$-\dot{r}_x = \frac{\omega a}{\eta} \left[\sin u \cos \Omega + \cos i \cos u \sin \Omega + e(\sin g \cos \Omega + \cos i \cos g \sin \Omega) \right],$$

$$-\dot{r}_y = \frac{\omega a}{\eta} \left[\sin u \sin \Omega - \cos i \cos u \cos \Omega + e(\sin g \sin \Omega - \cos i \cos g \cos \Omega) \right],$$

$$\dot{r}_z = \frac{\omega a}{\eta} \sin i (\cos u + e \cos g).$$

$$\dot{r}_x = \omega a (\mathcal{Z}_3 \mathcal{K}_1 - \mathcal{Z}_4 \mathcal{K}_2),$$

$$\dot{r}_y = \omega a (\mathcal{Z}_3 \mathcal{K}_3 + \mathcal{Z}_4 \mathcal{K}_4),$$

$$\dot{r}_z = \omega a (\mathcal{Z}_3 \mathcal{K}_5 + \mathcal{Z}_4 \mathcal{K}_6).$$

$$\mathcal{Z}_3 = \frac{a}{r} \left[z_3 \mathcal{Z}_1 - \left(1 - \frac{X \bar{X}}{2} \right) \mathcal{Z}_2 \right],$$

$$\mathcal{Z}_4 = \frac{a}{r} \left[z_3 \mathcal{Z}_2 + \left(1 - \frac{X \bar{X}}{2} \right) \mathcal{Z}_1 \right],$$

где $z_3 = E - M$.

Глава 2.

Гелиоцентрические координаты Уинтнера

В пространстве $\mathbb{R}^3$ рассмотрим $N + 1$ материальных точек:

“Солнце” $Q_0, \quad m_0,$
“планеты” $Q_k, \quad \mu m_k m_0, \quad k = 1, \dots, N.$

Основное определение (Уинтнер, 1967, §341):

$$\mathbf{r}_0 = \frac{1}{\widehat{m}} \boldsymbol{\rho}_0 + \frac{\mu}{\widehat{m}} \sum_1 m_j \boldsymbol{\rho}_j,$$
$$\mathbf{r}_k = \boldsymbol{\rho}_k - \boldsymbol{\rho}_0, \quad k = 1, \dots, N,$$

где $\widehat{m} = 1 + \mu m_1 + \dots + \mu m_N$. Бесстолкновительное конфигурационное пространство $\mathbb{A}_1$ имеет размерность $3N + 3$. Фазовое пространство $\mathbb{A}_2 = \mathbb{A}_1 \times \mathbb{R}^{3N+3}$.

Гамильтониан системы в гелиоцентрических координатах

При составлении канонических уравнений движения удобно вместо $\mathcal{H}$ использовать величину $h = \frac{\mathcal{H}}{\mu m_0}$. После исключения центра инерции функция h представляется суммой невозмущенной и малой возмущающей частей:

$$h = h_0 + \mu h_1,$$

где

$$h_0 = \sum_1 \beta_k \left(\frac{\dot{\mathbf{r}}_k^2}{2} - \frac{\varkappa_k^2}{|\mathbf{r}_k|} \right),$$

$$h_1 = - \sum_2 m_j m_k \left(\frac{\mathcal{G} m_0}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k|} + \frac{\dot{\mathbf{r}}_j \dot{\mathbf{r}}_k}{\hat{m}} \right),$$

$$\beta_k = m_k \left(1 - \frac{\mu m_k}{\hat{m}} \right), \quad \varkappa_k^2 = \frac{\mathcal{G} m_0 m_k}{\beta_k} \quad (\varkappa_k > 0).$$

Разложение главной части возмущающей функции

По теореме косинусов $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos \varphi$, где $r_s = |\mathbf{r}_s|$, а φ — угол между планетными векторами $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$. Отсюда (Ласкар, Робютель, 1995):

$$\frac{a_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} = \frac{a_2}{r_2} (A + B)^{-1/2},$$

где

$$A = 1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos(\lambda_1 - \lambda_2),$$

$$B = 2\alpha B_1 + \alpha^2 B_2,$$

$$B_1 = \cos(\lambda_1 - \lambda_2) - \frac{r_1}{a_1} \frac{a_2}{r_2} \cos \varphi,$$

$$B_2 = \left(\frac{r_1}{a_1} \frac{a_2}{r_2} \right)^2 - 1.$$

Разложение главной части возмущающей функции

$$\frac{a_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} = \frac{a_2}{r_2} A^{-1/2} - \frac{1}{2} \frac{a_2}{r_2} B A^{-3/2} + \frac{3}{8} \frac{a_2}{r_2} B^2 A^{-5/2} - \frac{5}{16} \frac{a_2}{r_2} B^3 A^{-7/2} + \dots$$

Основное представление в виде ряда Пуассона:

$$\frac{a_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} = \sum_{\mathbb{K}} C_{\ell w n} X_1^{\ell_1} X_2^{\ell_2} Y_1^{\ell_3} Y_2^{\ell_4} \bar{X}_1^{w_1} \bar{X}_2^{w_2} \bar{Y}_1^{w_3} \bar{Y}_2^{w_4} \text{Exp}(n_1 \lambda_1 + n_2 \lambda_2),$$

где суммирование ведется по множеству

$$\begin{aligned} \mathbb{K} = \{ \ell, w \in \mathbb{Z}^4, n \in \mathbb{Z}^2 : \ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4, w_1, w_2, w_3, w_4 \geq 0, \\ \ell_1 + \ell_2 + \ell_3 + \ell_4 - w_1 - w_2 - w_3 - w_4 + n_1 + n_2 = 0, \\ \ell_3 + \ell_4 + w_3 + w_4 = \text{четное} \}, \end{aligned}$$

а вещественные коэффициенты $C_{\ell w n} = C_{\ell_1 \ell_2 \ell_3 \ell_4 w_1 w_2 w_3 w_4 n_1 n_2}(\alpha)$ удовлетворяют соотношению $C_{\ell w n} = C_{w \ell, -n}$ и зависят лишь от отношения больших полуосей $\alpha = a_1/a_2$.

Гамильтониан системы и уравнения движения в оскулирующих элементах

Вектор медленных и быстрых переменных:

$$\mathbf{\Gamma} = (\mathbf{P}, \mathbf{Q}, \mathbf{\Lambda}, \mathbf{p}, \mathbf{q}), \quad \boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N),$$

$$h(\mathbf{\Gamma}, \boldsymbol{\lambda}) = h_0(\mathbf{\Lambda}) + \mu h_1(\mathbf{\Gamma}, \boldsymbol{\lambda}).$$

Уравнения движения в оскулирующих элементах:

$$\begin{aligned} \dot{P} &= -\mu \frac{\partial h_1}{\partial p}, & \dot{p} &= \mu \frac{\partial h_1}{\partial P}, \\ \dot{Q} &= -\mu \frac{\partial h_1}{\partial q}, & \dot{q} &= \mu \frac{\partial h_1}{\partial Q}, \\ \dot{\Lambda} &= -\mu \frac{\partial h_1}{\partial \lambda}, & \dot{\lambda} &= \omega + \mu \frac{\partial h_1}{\partial \Lambda}, \end{aligned}$$

где $\omega = \partial h_0 / \partial \Lambda = \varkappa^4 \beta^3 \Lambda^{-3} = \varkappa a^{-3/2}$.

Глава 3.

Уравнения движения в средних элементах

$$\begin{aligned}\dot{P} &= -\partial H/\partial p, & \dot{p} &= \partial H/\partial P, \\ \dot{Q} &= -\partial H/\partial q, & \dot{q} &= \partial H/\partial Q, \\ \dot{\Lambda} &= 0, & \dot{\lambda} &= \partial H/\partial \Lambda.\end{aligned}\tag{1}$$

Осредненный гамильтониан разлагается в ряд по степеням μ :

$$H = H(\Gamma) = H(\mathbf{P}, \mathbf{Q}, \Lambda, \mathbf{p}, \mathbf{q}) = H_0 + \mu H_1 + \mu^2 H_2 + \dots$$

Уравнения первого и второго приближения задаются системой (1) соответственно с гамильтонианами

$$H = H_0 + \mu H_1 \text{ и } H = H_0 + \mu H_1 + \mu^2 H_2.$$

Для определения поведения медленных переменных достаточно решать в (1) лишь $2N$ уравнений относительно P и Q .

Метод Хори–Депри. Осредненный гамильтониан первого и второго приближения

Производящая функция: $T = \mu T_1 + \mu^2 T_2 + \dots$

$\langle f \rangle$ — оператор осреднения.

$\tilde{f}$ — интегрирующий оператор.

$\{fg\}$ — скобки Пуассона.

Первое приближение:

$$H_1 = \langle h_1 \rangle, \quad T_1 = \tilde{h}_1.$$

Второе приближение:

$$H_2 = \frac{1}{2} \langle \{T_1, h_1 + H_1\} \rangle, \quad T_2 = \frac{1}{2} \overline{\{T_1, h_1 + H_1\}}.$$

Уравнения первого и второго приближения

Переменные X и Y — удобные безразмерные нормировки соответственно эксцентрических P и облических Q переменных. Осредненная система, состоящая из $2N$ уравнений:

$$\dot{X} = \frac{-2i}{\Lambda} \frac{\partial H}{\partial \bar{X}}, \quad \dot{Y} = \frac{-i}{2\Lambda} \frac{\partial H}{\partial \bar{Y}}.$$

Уравнения первого приближения:

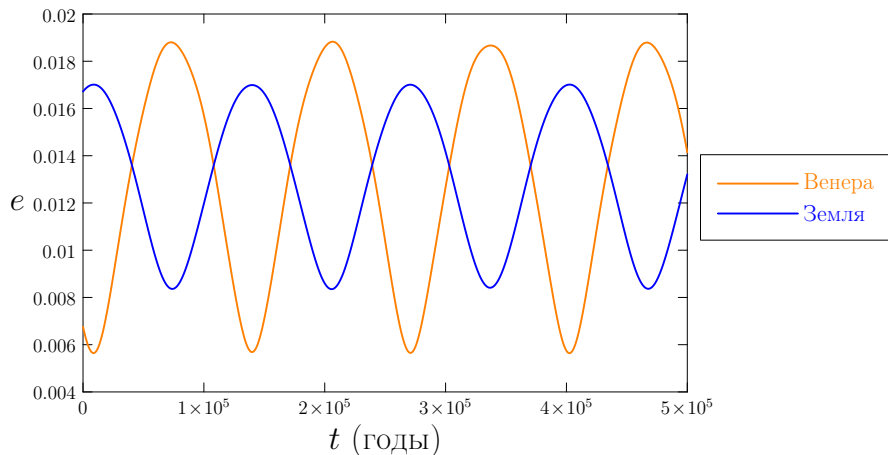
$$\dot{X}_s = \mu \frac{-2i}{\Lambda_s} \frac{\partial H_1}{\partial \bar{X}_s}, \quad \dot{Y}_s = \mu \frac{-i}{2\Lambda_s} \frac{\partial H_1}{\partial \bar{Y}_s}, \quad 1 \leq s \leq N.$$

Уравнения второго приближения:

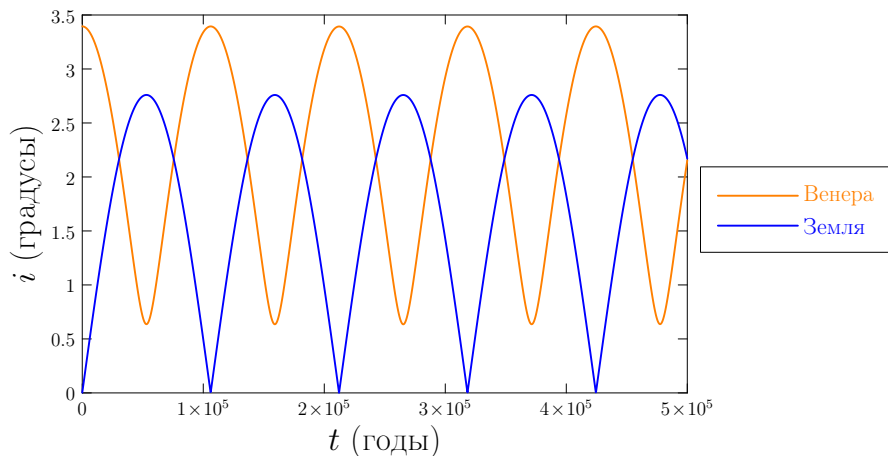
$$\begin{aligned} \dot{X}_s &= \frac{-2i}{\Lambda} \left(\mu \frac{\partial H_1}{\partial \bar{X}_s} + \mu^2 \frac{\partial H_2}{\partial \bar{X}_s} \right), \\ \dot{Y}_s &= \frac{-i}{2\Lambda} \left(\mu \frac{\partial H_1}{\partial \bar{Y}_s} + \mu^2 \frac{\partial H_2}{\partial \bar{Y}_s} \right), \quad 1 \leq s \leq N \end{aligned}$$

Глава 4.

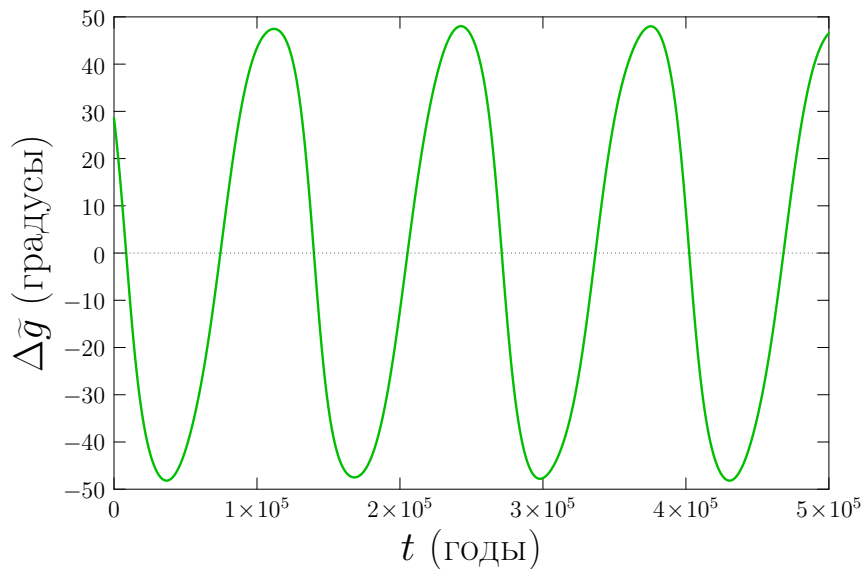
Модельная система «Солнце–Венера–Земля», $\mu \sim 10^{-6}$.
Уравнения первого приближения. Эксцентриситеты



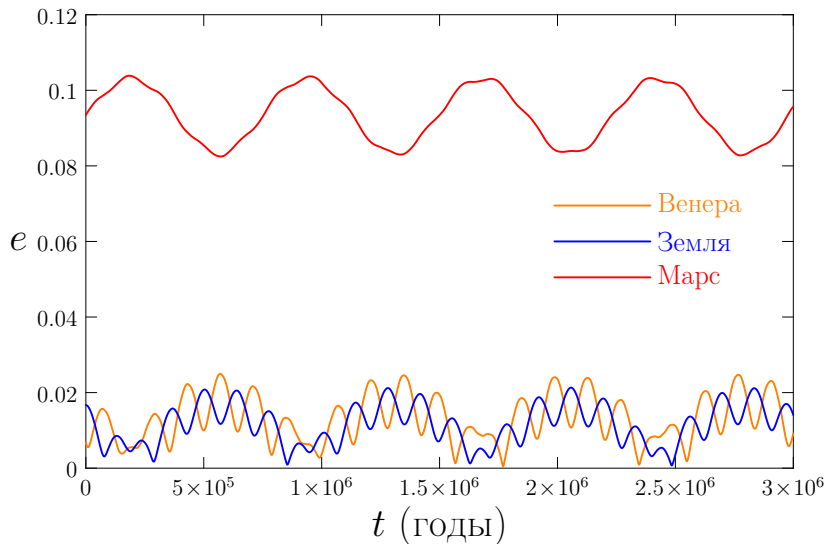
Модельная система «Солнце–Венера–Земля», $\mu \sim 10^{-6}$.
Уравнения первого приближения. Наклонения



Вековой резонанс в системе «Солнце–Венера–Земля»

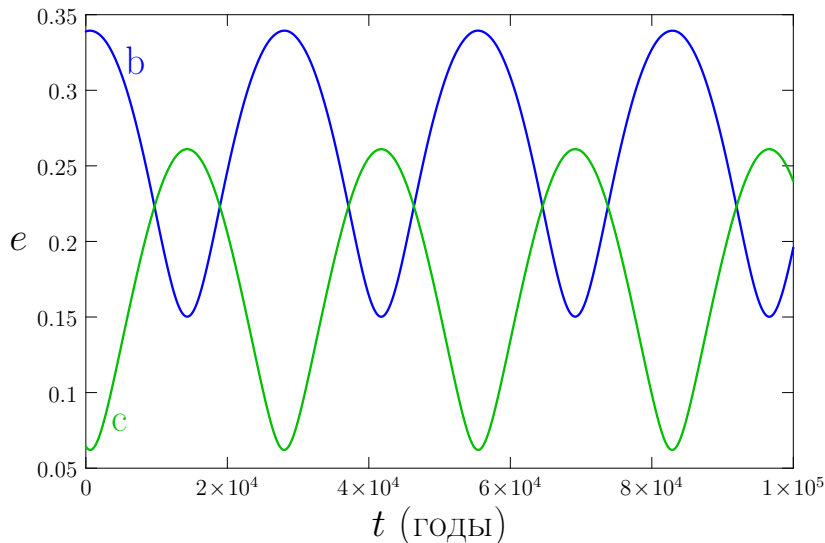


Система «Солнце–Венера–Земля–Марс», $\mu \sim 10^{-6}$.
Уравнения первого приближения. Эксцентриситеты



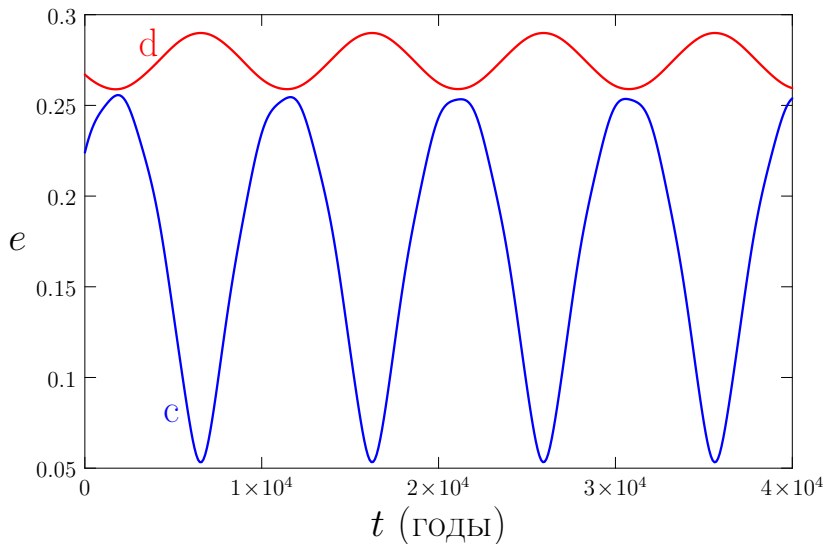
Двупланетная система HD 12661, $\mu \sim 10^{-3}$.

Уравнения первого приближения. Эксцентриситеты

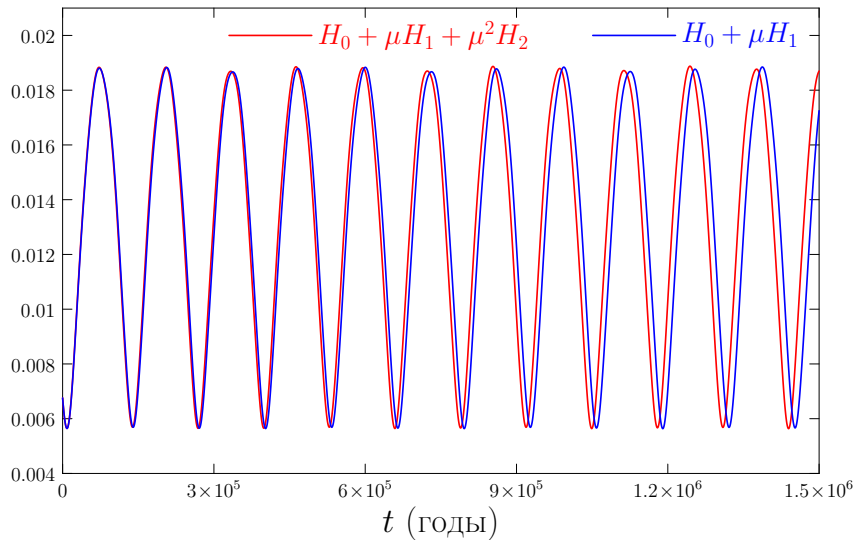


Двупланетная система ν Andromedae, $\mu \sim 10^{-3}$.

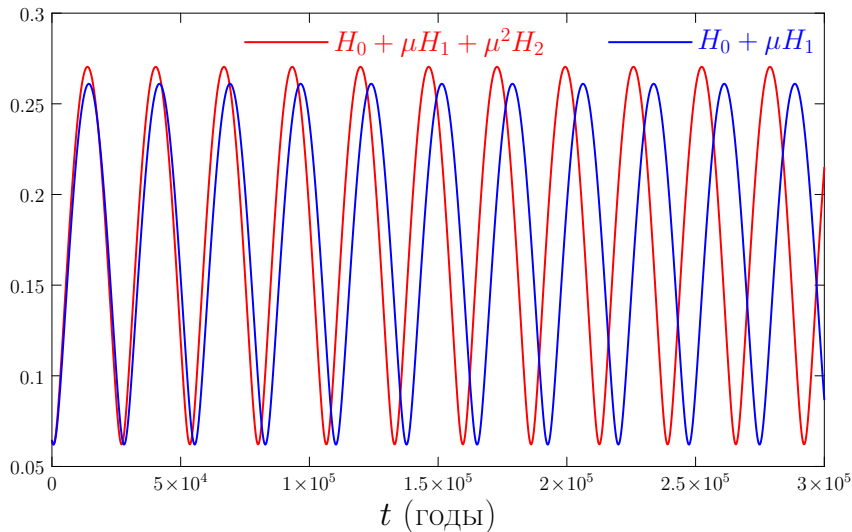
Уравнения первого приближения. Эксцентриситеты



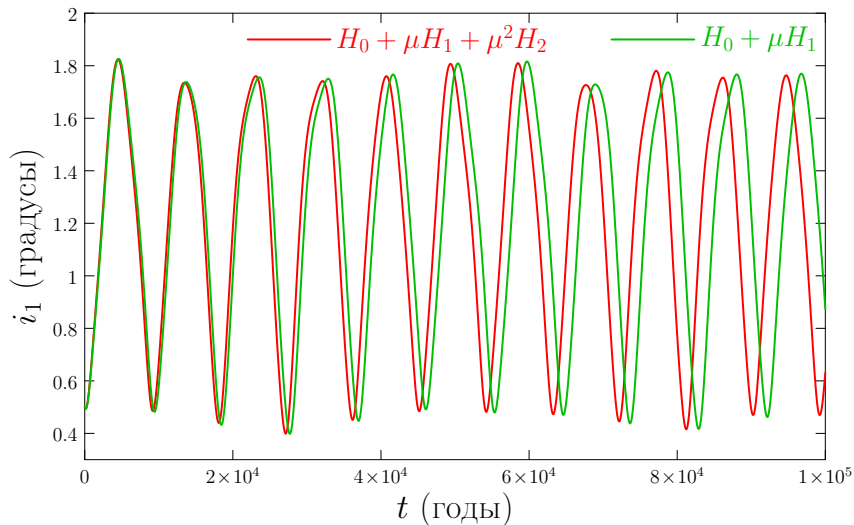
Система «Солнце–Венера–Земля», $\mu \sim 10^{-6}$. Эксцентриситет Венеры в первом и во втором приближении



Система HD 12661, $\mu \sim 10^{-3}$. Эксцентриситет внешней планеты HD 12661 с в первом и во втором приближении



Система HD 12661, $\mu \sim 10^{-3}$. Наклонение внутренней планеты HD 12661 b в первом и во втором приближении



Научная новизна работы

- Представлен и применен алгоритм разложения основных функций кеплеровского движения по комплексным элементам Пуанкаре. Приведены явные формулы данного алгоритма. Наряду с разложением прямоугольных координат предложен метод разложения производных по времени от этих функций.
- С теоретической и практической точки зрения показано, что в планетной задаче система гелиоцентрических координат Уинтнера является достойной альтернативой ныне широко используемым координатам Якоби и координатам Пуанкаре.
- Для уравнений, записанных в комплексных элементах Пуанкаре, представлен и применен алгоритм осреднения.

Результаты, выносимые на защиту

- Предложен и применен метод разложения основных функций кеплеровского движения по системе комплексных элементов Пуанкаре.
- Представлен и реализован на практике метод разложения гамильтониана планетной задачи в гелиоцентрических координатах Уинтнера.
- Разработан и применен метод построения осредненных уравнений движения в комплексных элементах Пуанкаре.
- Определены и изучены основные характеристики орбитальной эволюции в нескольких модельных, а также в двух реальных планетных системах HD 12661 и ν Andromedae.

Публикации по теме диссертации

1. Микрюков Д.В., Холшевников К.В. Разложение основных функций кеплеровского движения с использованием комплексных переменных // Письма в Астрономический Журнал, том 42, №4, 2016, с. 302-310.
2. Микрюков Д.В. Разложение гамильтониана планетной задачи в ряд Пуассона в гелиоцентрической системе отсчета // Письма в Астрономический Журнал, том 42, №8, 2016, с. 611-622.
3. Микрюков Д.В. Осреднение уравнений планетной задачи в астрочцентрической системе отсчета // Письма в Астрономический Журнал, том 44, №5, 2018, с. 361-375.
4. Микрюков Д.В. Исследование устойчивости планетной системы на космогонических временах // Письма в Астрономический Журнал, том 46, №4, 2020, с. 366-380.

Список конференций

1. Студенческая конференция «Science and Progress», СПбГУ, Санкт-Петербург, Россия, 2015 г.
2. 45-ая Международная студенческая научная конференция «Физика космоса», УрФУ, Екатеринбург, Россия, 2016 г.
3. VI Пулковская молодежная астрономическая конференция, Главная (Пулковская) астрономическая обсерватория РАН, Санкт-Петербург, Россия, 2016 г.
4. 47-ая Международная студенческая научная конференция «Физика космоса», УрФУ, Екатеринбург, Россия, 2018 г.
5. VII Пулковская молодежная астрономическая конференция, Главная (Пулковская) астрономическая обсерватория РАН, Санкт-Петербург, Россия, 2018 г.
6. 49-ая Международная студенческая научная конференция «Физика космоса», УрФУ, Екатеринбург, Россия, 2020 г.

Автор выражает благодарность К.В. Холшевникову за руководство работой, В.Ш. Шайдулину за помощь в оформлении рисунков и презентации, а также сотрудникам Кафедры небесной механики Санкт-Петербургского Государственного Университета за ценные замечания, способствовавшие улучшению работы.

Спасибо за внимание!

В чем состоит преимущество комплексных элементов Пуанкаре перед их вещественными аналогами?

Пусть некоторая функция $f = f(x_1^2 + x_2^2)$ раскладывается в ряд по степеням величины $x_1^2 + x_2^2$, где x_1 и x_2 — некоторые достаточно малые параметры. Разложим $x_1^2 + x_2^2$ на множители:

$$x_1^2 + x_2^2 = \mathcal{A}\mathcal{B},$$

где $\mathcal{A} = x_1 - ix_2$, $\mathcal{B} = \bar{\mathcal{A}}$.

Простейший пример:

$$\frac{1}{1 - (x_1^2 + x_2^2)} = 1 + x_1^2 + x_2^2 + x_1^4 + 2x_1^2x_2^2 + x_2^4 + \dots,$$
$$\frac{1}{1 - \mathcal{A}\mathcal{B}} = 1 + \mathcal{A}\mathcal{B} + \mathcal{A}^2\mathcal{B}^2 + \dots$$

Очевидно, чем больше степень, до которой производится разложение, тем существеннее экономия слагаемых.

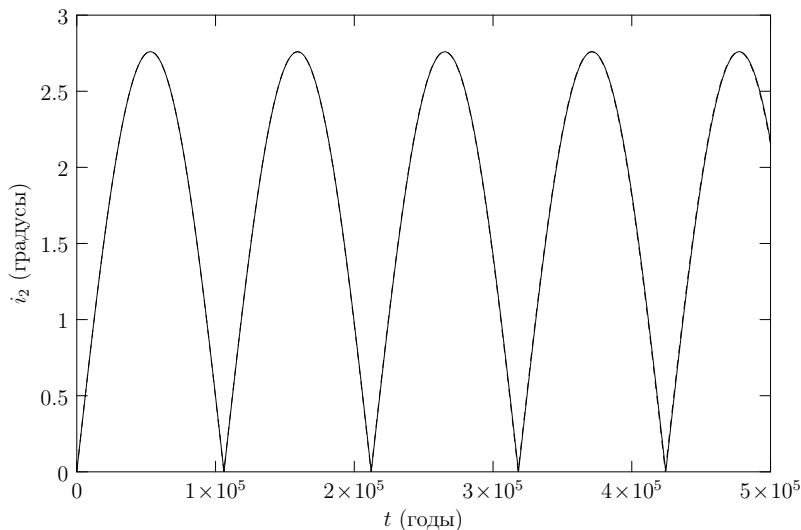
Об эффективности используемых комплексных элементов Пуанкаре

Количество слагаемых в некоторых основных разложениях кеплеровского движения.

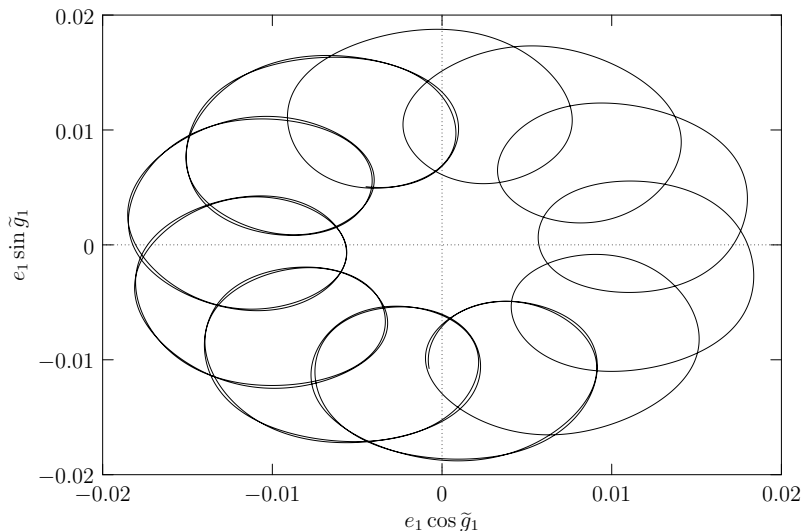
d	z_1	z_3	r/a	a/r	r_x/r	r_y/r	r_z/r	$\dot{r}_x$	$\dot{r}_y$	$\dot{r}_z$
1	4	4	5	5	7	7	4	6	6	4
	2	2	3	3	6	6	2	4	4	2
2	4	10	13	11	23	23	14	22	22	12
	2	4	6	5	16	16	6	14	14	4
4	12	44	50	45	105	105	102	100	100	92
	4	12	15	13	54	54	26	42	42	20
8	40	252	258	253	644	644	1162	622	622	1092
	8	40	43	41	202	202	140	178	178	120
12	84	744	750	745	2003	2003	5796	1952	1952	5544
	12	84	87	85	446	446	404	410	410	362

Здесь $z_1 = e \sin M$, а d — степень, до которой (включительно) производилось разложение. Для построения всех разложений использовалась система компьютерной алгебры Piranha.

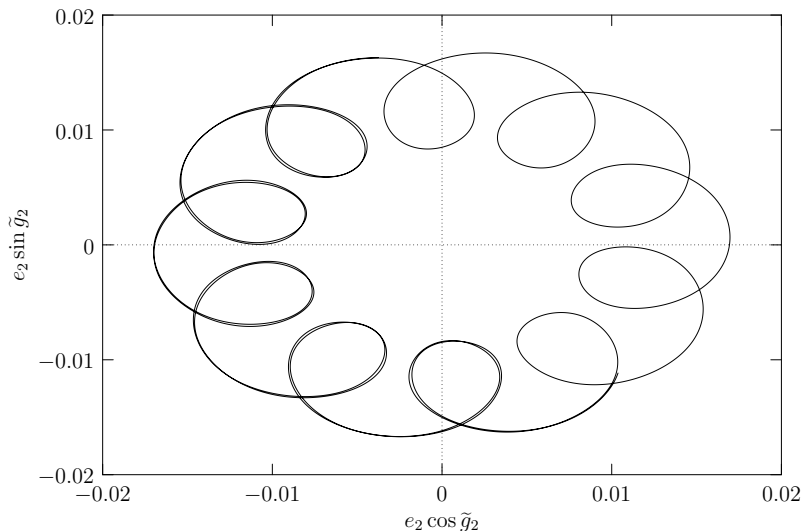
Модельная система «Солнце–Венера–Земля», $\mu \sim 10^{-6}$.
Наклонение Земли в первом и во втором приближении



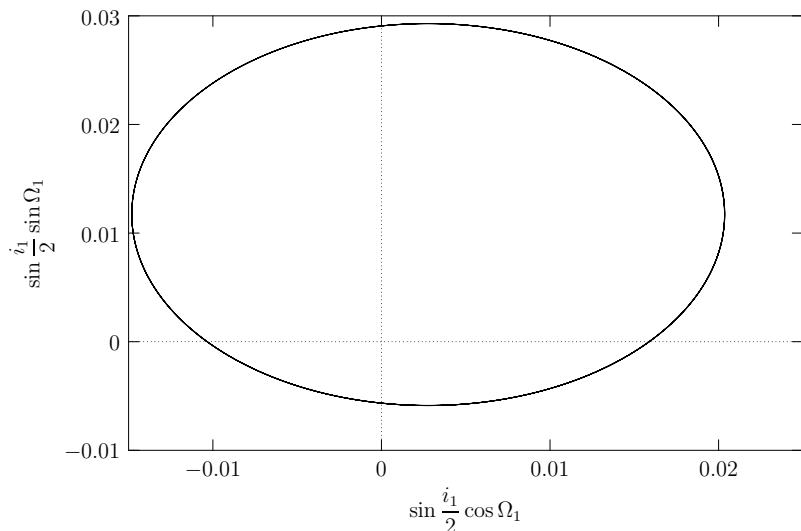
«Солнце–Венера–Земля». Поведение лагранжевых элементов $e_1 \cos \tilde{g}_1$ и $e_1 \sin \tilde{g}_1$ в первом приближении



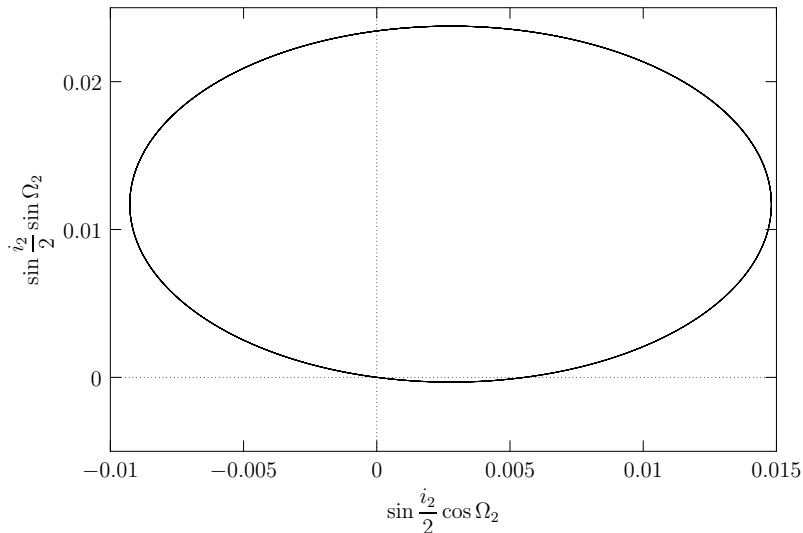
«Солнце–Венера–Земля». Поведение лагранжевых элементов $e_2 \cos \tilde{g}_2$ и $e_2 \sin \tilde{g}_2$ в первом приближении



«Солнце–Венера–Земля». Поведение лагранжевых элементов $\sin \frac{i_1}{2} \cos \Omega_1$ и $\sin \frac{i_1}{2} \sin \Omega_1$ в первом приближении



«Солнце–Венера–Земля». Поведение лагранжевых элементов $\sin \frac{i_2}{2} \cos \Omega_2$ и $\sin \frac{i_2}{2} \sin \Omega_2$ в первом приближении



Вековой резонанс в системе HD 12661. Результаты интегрирования системы первого приближения

