

Определение предварительной орбиты с помощью теоремы Ламберта

В.Б.Кузнецов
Институт Прикладной Астрономии РАН

Задача:

- ▶ Рассмотреть универсальные методы определения предварительных орбит по наблюдениям, разделённым произвольными интервалами времени.

История вопроса

- ▶ Гаусс (1809)
- ▶ Перов (1989)
- ▶ Dumolin (1994)
- ▶ Gooding (1997)
- ▶ $f_1(x,y) = 0, f_2(x,y) = 0$

Геометрические соотношения

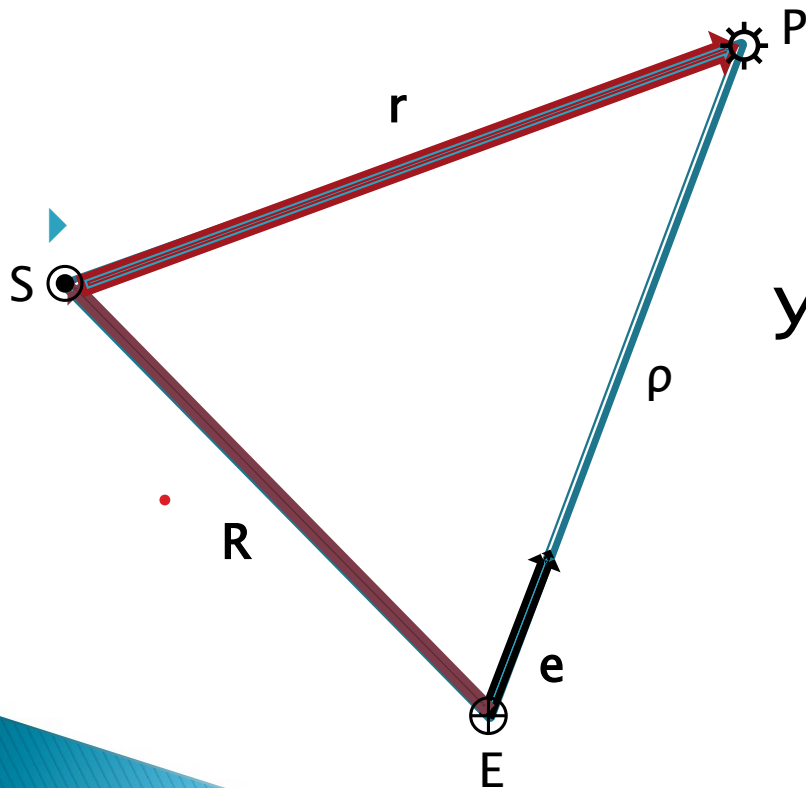
- ▶ Три наблюдения, в моменты времени t_1 , t_2 и t_3 .



$$\left. \begin{aligned} \mathbf{r}_1 &= \mathbf{e}_1 \rho_1 - \mathbf{R}_1 \\ \mathbf{r}_2 &= \mathbf{e}_2 \rho_2 - \mathbf{R}_2 \\ \mathbf{r}_3 &= \mathbf{e}_3 \rho_3 - \mathbf{R}_3 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Условие компланарности:

$$\mathbf{r}_1(\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3) = 0. \quad (2)$$



Геометрические соотношения

$$\rho_2 = -\frac{\mathbf{e}_1(\mathbf{e}_3 \times \mathbf{R}_2)\rho_1\rho_3 + \mathbf{e}_1(\mathbf{R}_2 \times \mathbf{R}_3)\rho_1 - \mathbf{R}_1(\mathbf{e}_3 \times \mathbf{R}_2)\rho_3 - \mathbf{R}_1(\mathbf{R}_2 \times \mathbf{R}_3)}{\mathbf{e}_1(\mathbf{e}_2 \times \mathbf{R}_3)\rho_1\rho_3 - \mathbf{e}_1(\mathbf{e}_2 \times \mathbf{R}_3)\rho_1 - \mathbf{R}_1(\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3)\rho_3 + \mathbf{R}_1(\mathbf{e}_2 \times \mathbf{R}_3)} \geq 0. \quad (3)$$

$$p = \frac{r_1 |\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3| - r_2 |\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_3| + r_3 |\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2|}{|\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3| - |\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_3| + |\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2|}. \quad (4)$$

$$\mathbf{e} = \frac{(p - r_1)\mathbf{r}_3 - (p - r_3)\mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_3|}. \quad (5)$$

Уравнения Шефера

► Шефер (2010)

$$\left. \begin{aligned} & \sqrt{r_1 + \sqrt{2(r_1 r_2 + \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2)}(2x_{21} - 1) + r_2} \left[\sqrt{r_1 r_2 + \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2} + \frac{\sqrt{2}}{3} X(x_{21}) (r_1 + \sqrt{2(r_1 r_2 + \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2)}(2x_{21} - 1) + r_2) \right] = \\ & = k(t_2 - t_1) + kL(\rho_1 - \rho_2) \\ & \sqrt{r_2 + \sqrt{2(r_2 r_3 + \mathbf{r}_2 \mathbf{r}_3)}(2x_{32} - 1) + r_3} \left[\sqrt{r_2 r_3 + \mathbf{r}_2 \mathbf{r}_3} + \frac{\sqrt{2}}{3} X(x_{32}) (r_2 + \sqrt{2(r_2 r_3 + \mathbf{r}_2 \mathbf{r}_3)}(2x_{32} - 1) + r_3) \right] = \\ & = k(t_3 - t_2) + kL(\rho_2 - \rho_3) \end{aligned} \right\}, (6)$$

где k – постоянная Гаусса, $L = 0.00576832$ – абберационная постоянная, $X(x_{21})$ и $X(x_{32})$ – гипергеометрическая функция:

$$X(x) = F(1, 3, 5/2; x).$$

Уравнения Шефера (продолжение)

$$x_{21} = \frac{r_1 r_2 - \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2 - p(r_1 - \sqrt{2(r_1 r_2 + \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2)} + r_2)}{2p\sqrt{2(r_1 r_2 + \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2)}}. \quad (7)$$

$$x_{32} = \frac{r_2 r_3 - \mathbf{r}_2 \mathbf{r}_3 - p(r_2 - \sqrt{2(r_2 r_3 + \mathbf{r}_2 \mathbf{r}_3)} + r_3)}{2p\sqrt{2(r_2 r_3 + \mathbf{r}_2 \mathbf{r}_3)}}. \quad (8)$$

$$x \in [-1, 1]$$

для $x < -1$ $x/(x-1)$ $x \in (-\infty, 0.5]$

$$F\left(1, 3, \frac{5}{2}; x\right) = \frac{1}{(1-x)^3} F\left(3, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}; \frac{x}{x-1}\right). \quad (9)$$

Орбита в плоскости эклиптики

$$\left. \begin{aligned} & \sqrt{r_1 + \sqrt{2(r_1 r_2 + \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2)}(2x_{21} - 1) + r_2} \left[\sqrt{r_1 r_2 + \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2} + \frac{\sqrt{2}}{3} X(x_{21}) \left(r_1 + \sqrt{2(r_1 r_2 + \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2)}(2x_{21} - 1) + r_2 \right) \right] = \\ & = k(t_2 - t_1) + kL(\rho_1 - \rho_2) \\ & \sqrt{r_2 + \sqrt{2(r_2 r_3 + \mathbf{r}_2 \mathbf{r}_3)}(2x_{32} - 1) + r_3} \left[\sqrt{r_2 r_3 + \mathbf{r}_2 \mathbf{r}_3} + \frac{\sqrt{2}}{3} X(x_{32}) \left(r_2 + \sqrt{2(r_2 r_3 + \mathbf{r}_2 \mathbf{r}_3)}(2x_{32} - 1) + r_3 \right) \right] = \\ & = k(t_3 - t_2) + kL(\rho_2 - \rho_3) \\ & \sqrt{r_3 + \sqrt{2(r_3 r_4 + \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_4)}(2x_{43} - 1) + r_4} \left[\sqrt{r_3 r_4 + \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_4} + \frac{\sqrt{2}}{3} X(x_{43}) \left(r_3 + \sqrt{2(r_3 r_4 + \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_4)}(2x_{43} - 1) + r_4 \right) \right] = \\ & = k(t_4 - t_3) + kL(\rho_3 - \rho_4) \end{aligned} \right\}, (10)$$

где

$$x_{43} = \frac{r_3 r_4 - \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_4 - p(r_3 - \sqrt{2(r_3 r_4 + \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_4)} + r_4)}{2p\sqrt{2(r_3 r_4 + \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_4)}}. \quad (11)$$

Определение орбиты в плоскости эклиптики (продолжение)

$$r_4 = \frac{p}{1 + e \cos \theta_4}. \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \theta_4 &= \theta_3 + \Delta\theta_{43} \\ \cos \Delta\theta_{43} &= \frac{\mathbf{r}_3 \mathbf{r}_4}{r_3 r_4}. \end{aligned} \quad (13)$$

$$\cos \theta_3 = \frac{1}{e} \left(\frac{p}{r_3} - 1 \right). \quad (14)$$

► Подставим (13) и (14) в (12)

$$\left[(p - r_4)(\mathbf{r}_3 \mathbf{r}_4) - (p - r_3)r_4^2 \right]^2 - \left(r_3^2 r_4^2 - (\mathbf{r}_3 \mathbf{r}_4)^2 \right) \left(e^2 r_4^2 - (p - r_4)^2 \right) = 0. \quad (15)$$

Определение орбиты в плоскости эклиптики (продолжение)

$$\sqrt{r_1 + \sqrt{2(r_1 r_4 + \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_4)}(2x_{41} - 1) + r_4} \left[\sqrt{r_1 r_4 + \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_4} + \frac{\sqrt{2}}{3} X(x_{41}) \left(r_1 + \sqrt{2(r_1 r_4 + \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_4)}(2x_{41} - 1) + r_4 \right) \right] =$$
$$= k(t_4 - t_1) + kL(\rho_1 - \rho_4), \quad (16)$$

где

$$x_{41} = \frac{r_1 r_4 - \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_4 - p(r_1 - \sqrt{2(r_1 r_4 + \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_4)} + r_4)}{2p\sqrt{2(r_1 r_4 + \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_4)}}. \quad (17)$$

Случай нескольких оборотов

$$\left. \begin{aligned}
 & \sqrt{r_1 + \sqrt{2(r_1 r_2 + \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2)}(2x_{21} - 1) + r_2} \left[\sqrt{r_1 r_2 + \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2} + \frac{\sqrt{2}}{3} X(x_{21}) \left(r_1 + \sqrt{2(r_1 r_2 + \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2)}(2x_{21} - 1) + r_2 \right) \right] = \\
 & = k(t_2 - t_1) + kL(\rho_1 - \rho_2) - \frac{\pi \lambda_{21}}{8\sqrt{2}} \frac{\left(r_1 + \sqrt{2(r_1 r_2 + \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2)}(2x_{21} - 1) + r_2 \right)^{3/2}}{(x_{21}(1 - x_{21}))^{3/2}} \\
 & \sqrt{r_2 + \sqrt{2(r_2 r_3 + \mathbf{r}_2 \mathbf{r}_3)}(2x_{32} - 1) + r_3} \left[\sqrt{r_2 r_3 + \mathbf{r}_2 \mathbf{r}_3} + \frac{\sqrt{2}}{3} X(x_{32}) \left(r_2 + \sqrt{2(r_2 r_3 + \mathbf{r}_2 \mathbf{r}_3)}(2x_{32} - 1) + r_3 \right) \right] = \\
 & = k(t_3 - t_2) + kL(\rho_2 - \rho_3) - \frac{\pi \lambda_{32}}{8\sqrt{2}} \frac{\left(r_2 + \sqrt{2(r_2 r_3 + \mathbf{r}_2 \mathbf{r}_3)}(2x_{32} - 1) + r_3 \right)^{3/2}}{(x_{32}(1 - x_{32}))^{3/2}}
 \end{aligned} \right\} .(18)$$

Использование дополнительных наблюдений при определении орбиты

$$\sqrt{r_3 + \sqrt{2(r_3 r_i + \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_i)}(2x_{i3} - 1) + r_i} \left[\sqrt{r_3 r_i + \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_i} + \frac{\sqrt{2}}{3} X(x_{i3}) \left(r_3 + \sqrt{2(r_3 r_i + \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_i)}(2x_{i3} - 1) + r_i \right) \right] =$$

$$= k(t_3 - t_i) + kL(\rho_i - \rho_3), \quad (19)$$

где

$$x_{i3} = \frac{r_3 r_i - \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_i - p(r_3 - \sqrt{2(r_3 r_i + \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_i)} + r_i)}{2p\sqrt{2(r_3 r_i + \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_i)}}. \quad (20)$$

$$\rho_i = -\frac{\mathbf{e}_1(\mathbf{e}_3 \times \mathbf{R}_i)\rho_1\rho_3 + \mathbf{e}_1(\mathbf{R}_i \times \mathbf{R}_3)\rho_1 - \mathbf{R}_1(\mathbf{e}_3 \times \mathbf{R}_i)\rho_3 - \mathbf{R}_1(\mathbf{R}_i \times \mathbf{R}_3)}{\mathbf{e}_1(\mathbf{e}_i \times \mathbf{R}_3)\rho_1\rho_3 - \mathbf{e}_1(\mathbf{e}_i \times \mathbf{R}_3)\rho_1 - \mathbf{R}_1(\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_3)\rho_3 + \mathbf{R}_1(\mathbf{e}_i \times \mathbf{R}_3)} \geq 0. \quad (21)$$

$$\left[(p - r_4)(\mathbf{r}_i \mathbf{r}_4) - (p - r_i)r_4^2 \right]^2 - \left(r_i^2 r_4^2 - (\mathbf{r}_i \mathbf{r}_4)^2 \right) \left(e^2 r_4^2 - (p - r_4)^2 \right) = 0. \quad (22)$$

$$\min \sum_{i=1}^m f_i^2. \quad (23)$$

Пример 1. (1) Церера

Таблица 1. Наблюдения малой планеты (1) Церера

t (UT)	α (2000)	δ (2000)
1802 01 26.17022	12 43 22.43	+10 51 17.1
1802 02 11.12723	12 44 21.07	+12 15 23.6
1802 02 28.07632	12 37 51.71	+14 10 36.2

Таблица 2. Значения ρ_1 , ρ_2 и ρ_3 полученные для орбиты Цереры по методу Гаусса

ρ_1 (a.e.)	ρ_2 (a.e.)	ρ_3 (a.e.)
1.891319825755606	1.743877034466782	1.638878782220490

Таблица 3. Элементы эллиптической орбиты Цереры, полученные по методу Гаусса

M_0 (°)	a (a.e.)	e	i (°)	ω (°)	Ω (°)
21.75972	2.77710	0.087276	10.62269	60.78014	83.77568

Таблица 4. Представление наблюдений (O-C) эллиптической орбитой малой планеты (1) Церера, полученной по методу Гаусса

Наблюдение	$\Delta\alpha$ (")	$\Delta\delta$ (")
«1»	0.0	$1.03 \cdot 10^{-10}$
«2»	$-9.30 \cdot 10^{-8}$	$3.84 \cdot 10^{-8}$
«3»	$2.06 \cdot 10^{-10}$	$4.12 \cdot 10^{-11}$

Пример 1 (продолжение)

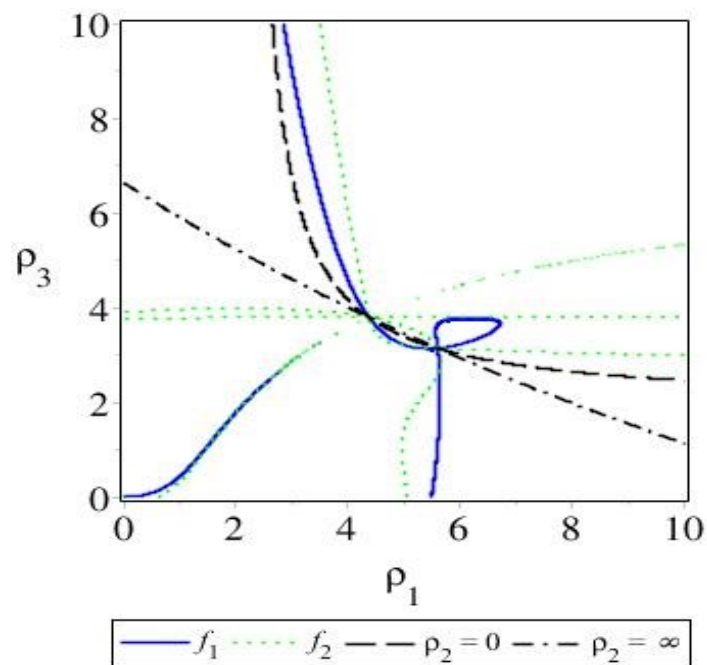


Рис. 1

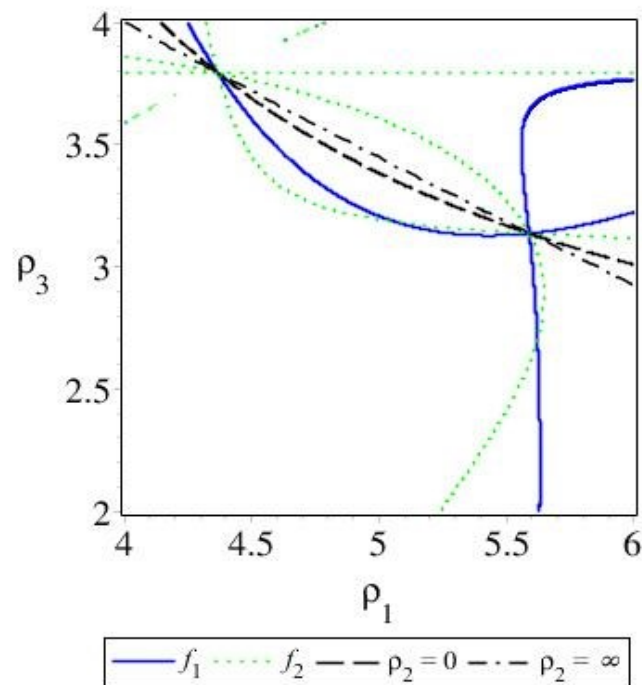


Рис. 2

Пример 1 (продолжение)

Таблица 5. Значения ρ_1 и ρ_3 полученные из (6), а также ρ_2 полученное из (3), для различных орбит Цереры

Орбита	ρ_1 (a.e.)	ρ_2 (a.e.)	ρ_3 (a.e.)
«1»	5.070287890941030	3.035787564833326	3.181134092358332
«2»	5.620104203055057	4.898622335908829	2.701585059888244
«3»	1.891319825931653	1.743877034674571	1.638878782462026

Таблица 6. Элементы орбит малой планеты Церера

Орбита	T_0 (Дата) / M_0 (°)	a (a.e.)	e	i (°)	ω (°)	Ω (°)
«1»	1802 05 24.91	-0.007753	26.009105	18.38737	134.6614	133.9518
«2»	1802 04 15.04	-0.003117	38.833839	141.6559	249.2368	19.14027
«3»	21.75972	2.7771034	0.0872756	10.62269	60.78014	83.77568
ИПА	18.55087	2.7674832	0.0807816	10.62512	65.05466	83.58780

Таблица 7. Представление наблюдений (О-С) Цереры полученными орбитами

Орбита	t_1		t_2		t_3	
	$\Delta\alpha$ (")	$\Delta\delta$ (")	$\Delta\alpha$ (")	$\Delta\delta$ (")	$\Delta\alpha$ (")	$\Delta\delta$ (")
«1»	$-4.21 \cdot 10^{-8}$	$7.69 \cdot 10^{-9}$	-13823.9	-15137.5	$-4.89 \cdot 10^{-8}$	$9.12 \cdot 10^{-9}$
«2»	$1.65 \cdot 10^{-8}$	$3.44 \cdot 10^{-9}$	7051.10	7861.33	$2.02 \cdot 10^{-8}$	$4.29 \cdot 10^{-9}$
«3»	$2.06 \cdot 10^{-10}$	0.0	$4.13 \cdot 10^{-10}$	$-1.65 \cdot 10^{-10}$	$6.18 \cdot 10^{-10}$	$-1.86 \cdot 10^{-10}$

Пример 2. Многооборотный случай для Цереры

Таблица 8. Наблюдения малой планеты (1) Церера на двух оборотах вокруг Солнца

t (UT)	α (2000)	δ (2000)	Обсерватория
1989 10 06.266992	06 13 08.139	+21 29 27.47	La Palma
1994 11 21.278624	09 30 07.871	+22 19 50.04	La Palma
1999 12 15.514838	12 17 24.546	+09 42 18.90	Table Mountain Observatory, Wrightwood

Таблица 9. Значения ρ_1 , ρ_2 и ρ_3 полученные для орбиты Цереры по методу Гаусса

ρ_1 (a.e.)	ρ_2 (a.e.)	ρ_3 (a.e.)
5.330736303342592	9.882979070527829	7.288261405765127

Таблица 10. Элементы эллиптической орбиты (1) Церера, полученные по методу Гаусса

M_0 (°)	a (a.e.)	e	i (°)	ω (°)	Ω (°)
168.37084	6.0719124	0.6712708	10.87438	223.3358	92.45585

Таблица 11. Представление наблюдений (О-С) эллиптической орбитой малой планеты (1) Церера, полученной по методу Гаусса

Наблюдение	$\Delta\alpha$ (")	$\Delta\delta$ (")
«1»	$2.06 \cdot 10^{-10}$	$1.24 \cdot 10^{-10}$
«2»	$4.12 \cdot 10^{-10}$	$6.19 \cdot 10^{-11}$
«3»	0.0	$-2.06 \cdot 10^{-11}$

Пример 2 (продолжение)

$$\lambda = 0.$$

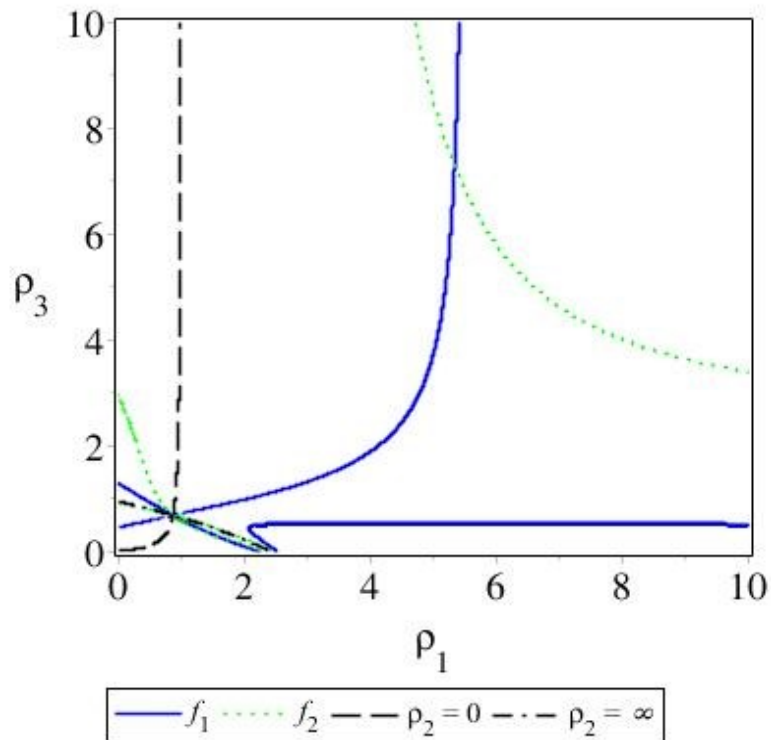


Рис. 3

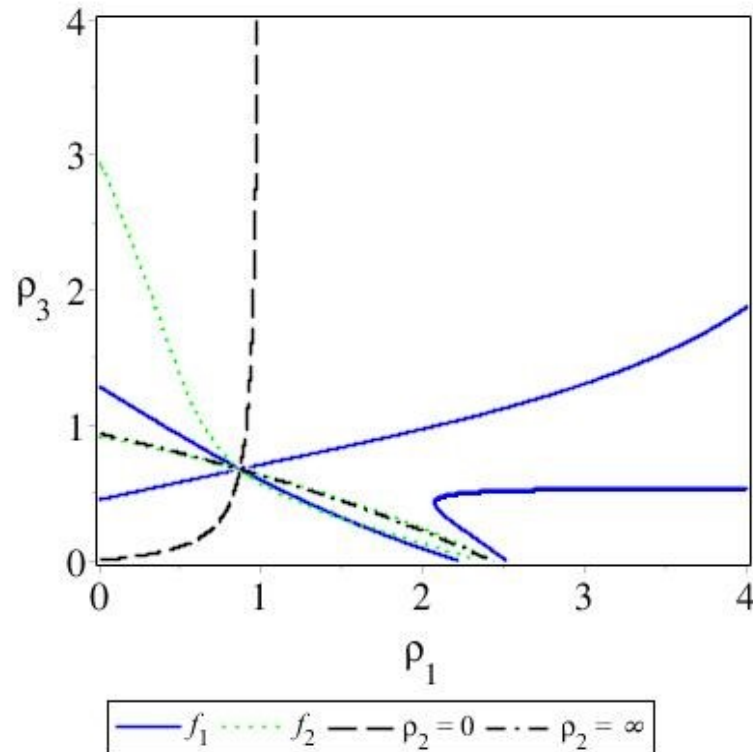


Рис. 4

Пример 2. (продолжение)

$\lambda = 1$

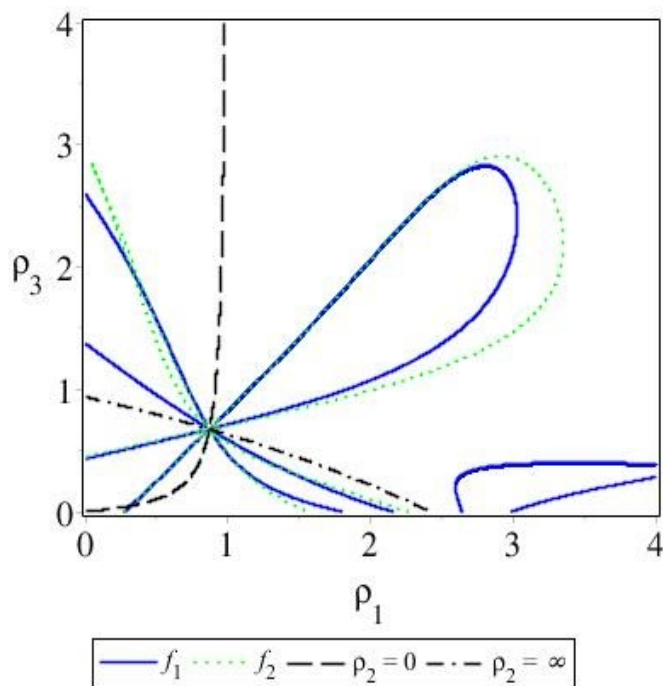


Рис. 5

$\lambda = 2$

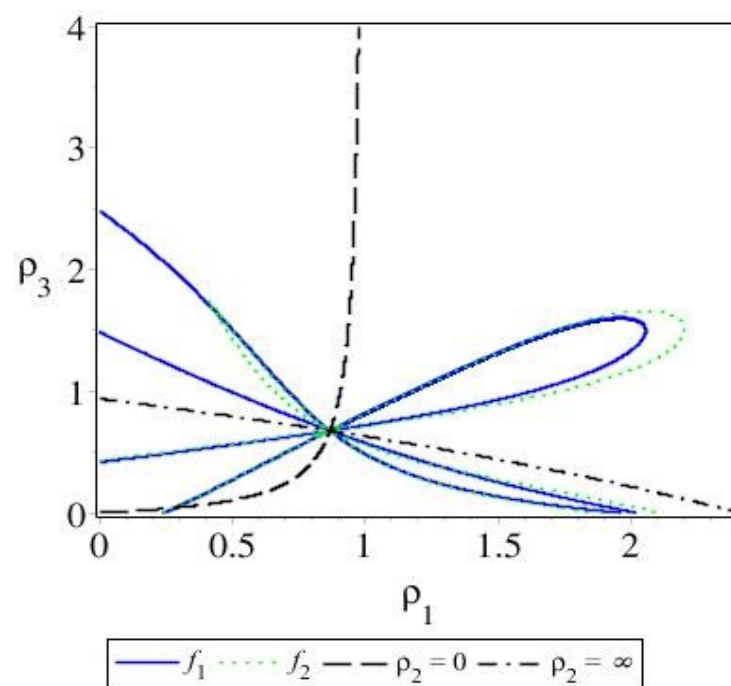


Рис. 6

Пример 2 (продолжение)

$\lambda = 3$

$\lambda = 4$

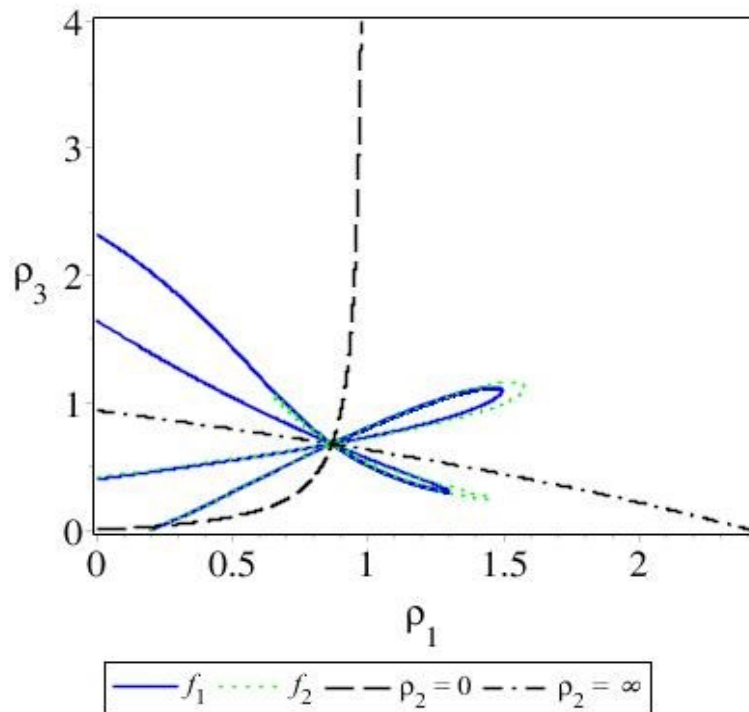


Рис. 7

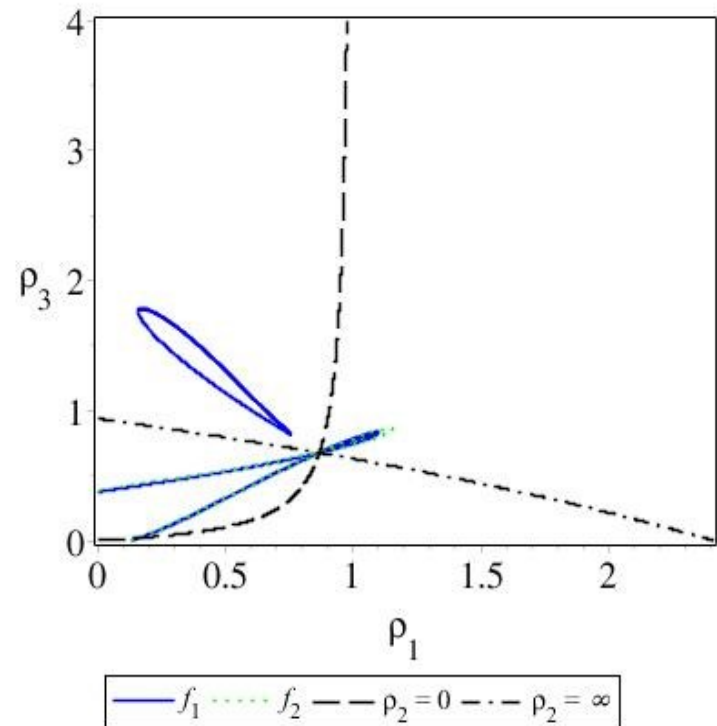


Рис. 8

Пример 2 (продолжение)

$\lambda = 5$

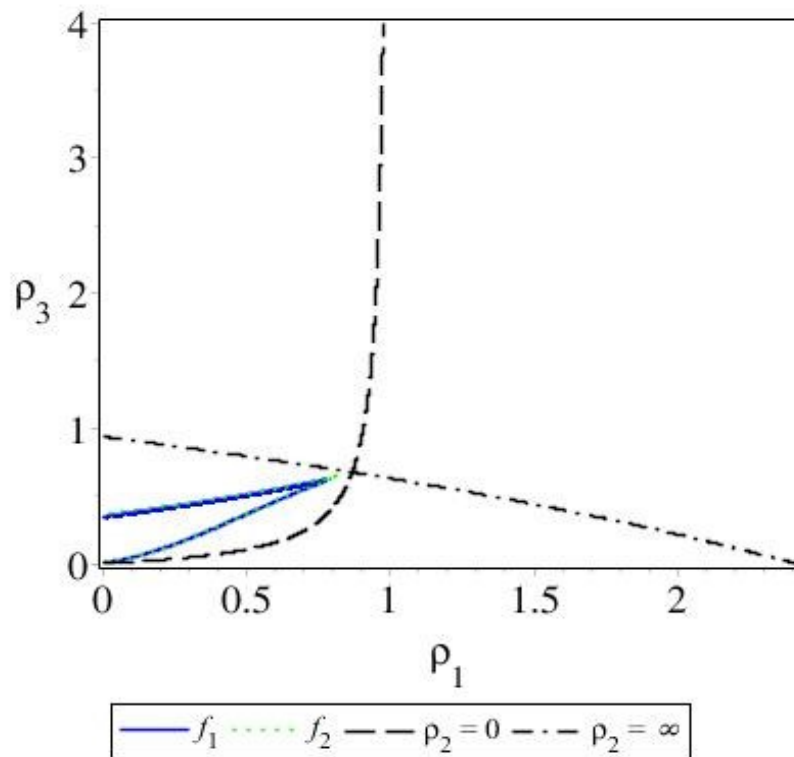


Рис. 9

$\lambda = 6$

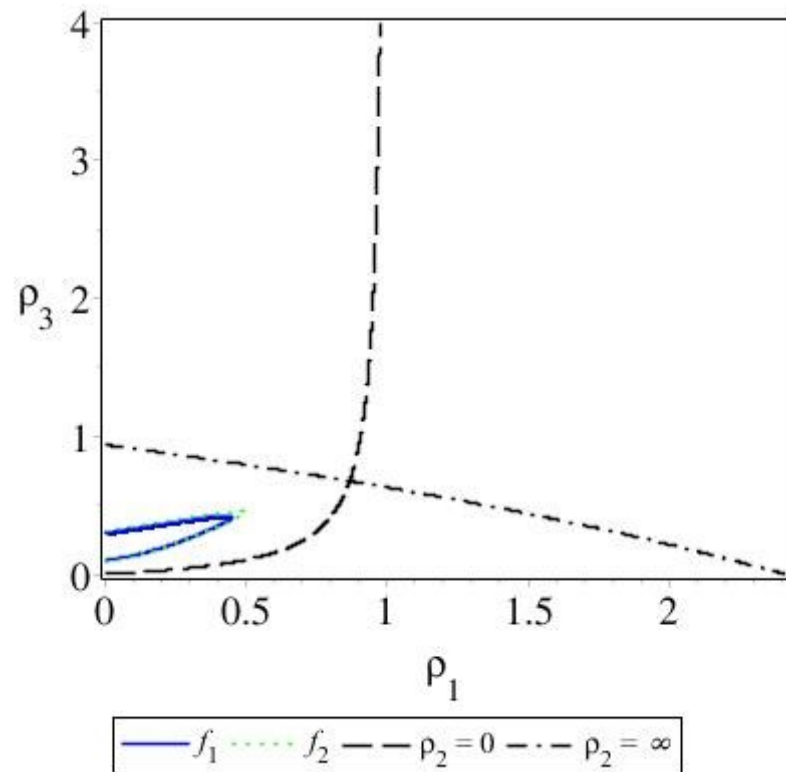


Рис. 10

Пример 2 (продолжение)

Таблица 12. Значения ρ_1 и ρ_3 полученные из (18), а также ρ_2 полученное из (3), для орбит Цереры с различными λ

Орбита	λ	ρ_1 (a.e.)	ρ_2 (a.e.)	ρ_3 (a.e.)
«1»	0	5.330736303342555	9.882979070527438	7.288261405764483
«2»	1	2.330312374842887	2.194573166098498	2.476702971075906
«3»	2	1.322753704866052	1.013508678714479	1.145340741445080
«4»	3	0.9916214008070519	0.7159417287328111	0.7933121887602645
«5»	4	0.7437087858291720	0.5165950269533240	0.5626649952044400
«6»	5	0.4846024718840451	0.3254076078061920	0.3482790824002550

Таблица 13. Элементы орбит малой планеты Церера

Орбита	M_0 (°)	a (a.e.)	e	i (°)	ω (°)	Ω (°)
«1»	168.37084	6.0719124	0.6712708	10.87438	223.3358	92.45585
«2»	335.23809	2.7707604	0.0801807	10.58385	64.40911	80.49993
«3»	320.40657	1.8161037	0.2315794	9.262600	91.37315	68.42235
«4»	295.19778	1.3942550	0.2125787	7.978527	117.9462	61.78917
«5»	270.96763	1.1545426	0.2068517	6.491669	140.5967	55.39217
«6»	248.12180	0.9973231	0.1929420	4.428702	159.0224	47.01734
ИПА	328.90748	2.7673307	0.0761314	10.60063	71.42797	80.65820

Пример 2. (окончание)

Таблица 14. Представление наблюдений (О-С) Цереры полученными орбитами

Орбита	t_1		t_2		t_3	
	$\Delta\alpha$ (")	$\Delta\delta$ (")	$\Delta\alpha$ (")	$\Delta\delta$ (")	$\Delta\alpha$ (")	$\Delta\delta$ (")
«1»	0.0	0.0	0.0	$1.65 \cdot 10^{-10}$	0.0	$-4.13 \cdot 10^{-11}$
«2»	$-2.06 \cdot 10^{-10}$	$2.06 \cdot 10^{-11}$	$-4.13 \cdot 10^{-10}$	$-6.19 \cdot 10^{-11}$	$4.13 \cdot 10^{-10}$	$-1.44 \cdot 10^{-10}$
«3»	$-2.06 \cdot 10^{-10}$	$3.51 \cdot 10^{-10}$	$5.78 \cdot 10^{-9}$	$1.44 \cdot 10^{-10}$	$8.25 \cdot 10^{-10}$	$-2.89 \cdot 10^{-10}$
«4»	0.0	$2.06 \cdot 10^{-11}$	0.0	$-6.19 \cdot 10^{-11}$	$1.03 \cdot 10^{-9}$	$-3.51 \cdot 10^{-10}$
«5»	0.0	0.0	$-1.24 \cdot 10^{-8}$	$-3.30 \cdot 10^{-10}$	$1.44 \cdot 10^{-9}$	$-4.54 \cdot 10^{-10}$
«6»	$6.19 \cdot 10^{-10}$	$2.06 \cdot 10^{-10}$	$1.71 \cdot 10^{-8}$	$8.25 \cdot 10^{-10}$	0.0	$2.06 \cdot 10^{-11}$

Пример 3. Эклиптическое движение

Таблица 15. Наблюдения малой планеты (255447) 2005 YN24

t (UT)	α (2000)	δ (2000)	Обсерватория
2005 12 02.38363	07 47 19.82	+21 09 16.3	Mt. Lemmon Survey
2005 12 24.35592	07 35 52.02	+21 36 59.6	Steward Observatory, Kitt Peak-Spacewatch
2006 01 05.29002	07 25 53.82	+21 58 33.6	Steward Observatory, Kitt Peak-Spacewatch
2006 01 21.26652	07 11 38.47	+22 25 17.5	Mt. Lemmon Survey

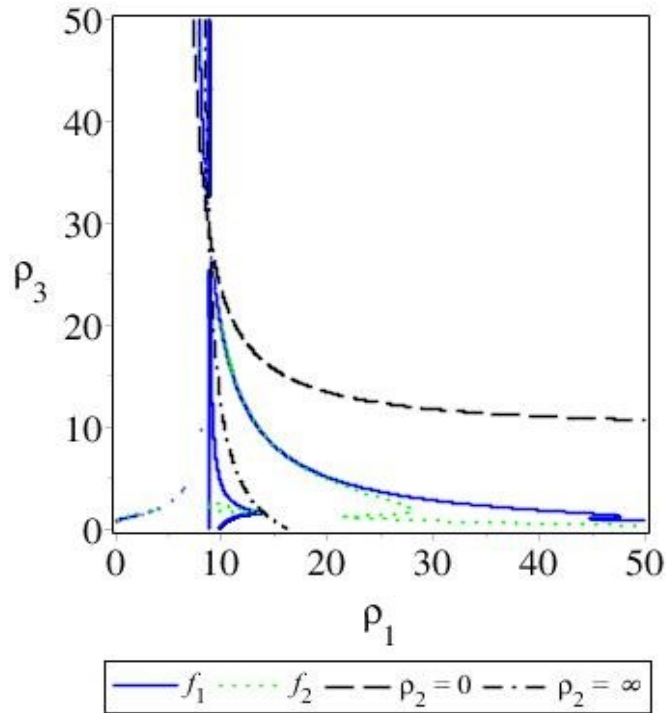


Рис. 11

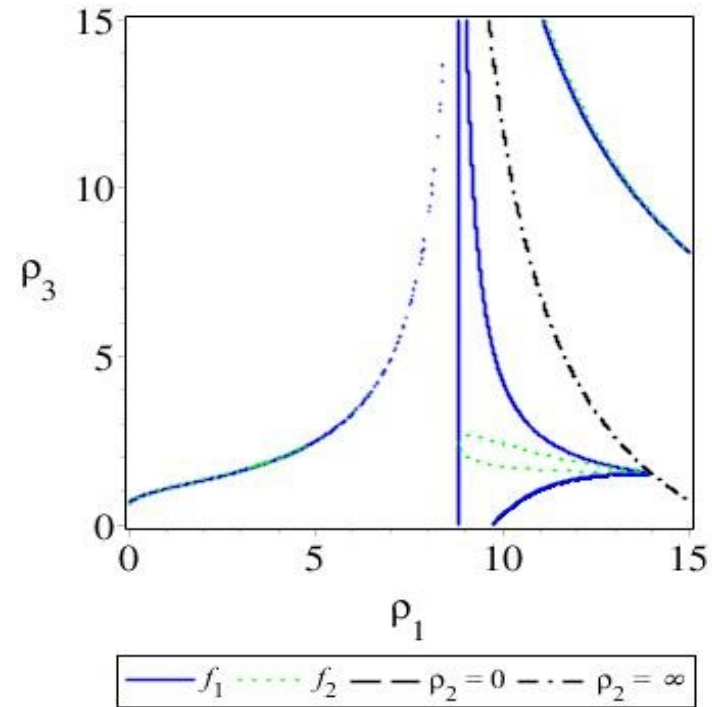


Рис. 12

Пример 3. (продолжение)

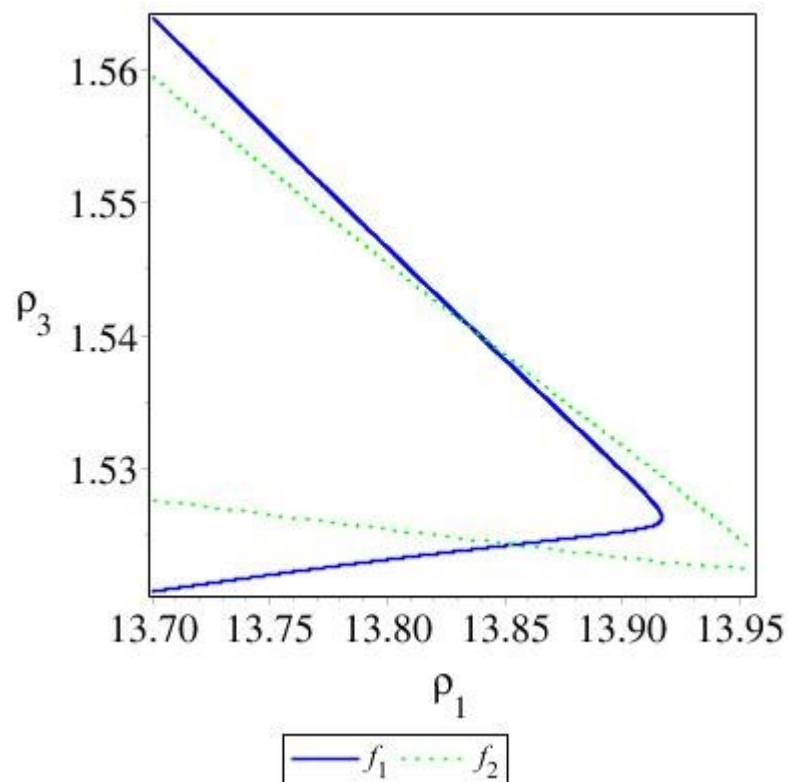


Рис. 13

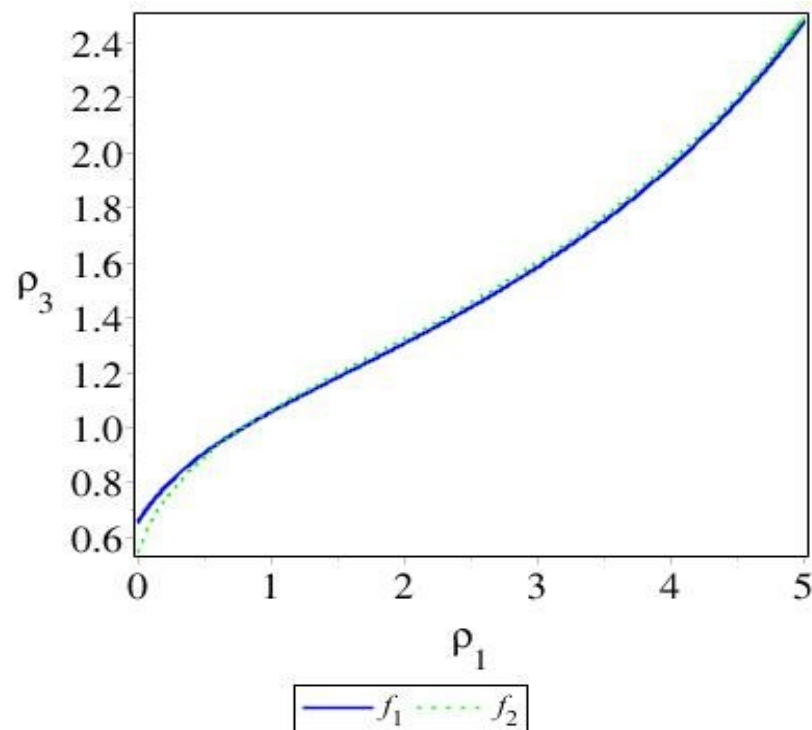


Рис. 14

Пример 3. (продолжение)

Таблица 16. Значения ρ_1 и ρ_3 полученные из (6), а также ρ_2 полученное из (3), для различных орбит (255447)

Орбита	ρ_1 (a.e.)	ρ_2 (a.e.)	ρ_3 (a.e.)
«1»	0.7783652274947430	0.8117660735996974	0.9960011385544933
«2»	13.83784505311063	937.3566749717482	1.540210982891532
«3»	13.85380134175507	932.3517794314476	1.524286191912149

Таблица 17. Элементы орбит малой планеты (255447)

Орбита	T_0 (Дата)/ M_0 (°)	a (a.e.)	e	i (°)	ω (°)	Ω (°)
«1»	8.96764	4.6322841	0.6939419	0.002082	60.36964	342.0452
«2»	2006 01 31.64	$-4.55 \cdot 10^{-7}$	1925.6776	172.2495	269.9954	292.1351
«3»	2006 01 31.55	$-4.57 \cdot 10^{-7}$	1914.7808	7.711203	269.9954	292.1995
ИПА	312.72678	3.1044627	0.1084302	0.00649	211.9844	310.9263

Таблица 18. Представление наблюдений (O-C) (255447) полученными орбитами

Орбита	T_1		t_2		t_3	
	$\Delta\alpha$ (")	$\Delta\delta$ (")	$\Delta\alpha$ (")	$\Delta\delta$ (")	$\Delta\alpha$ (")	$\Delta\delta$ (")
«1»	0.0	$-1.24 \cdot 10^{-10}$	$2.06 \cdot 10^{-10}$	$-4.13 \cdot 10^{-11}$	0.0	$-8.25 \cdot 10^{-11}$
«2»	$-2.63 \cdot 10^{-7}$	$6.41 \cdot 10^{-9}$	85412.96	77051.10	$-3.85 \cdot 10^{-7}$	$1.01 \cdot 10^{-8}$
«3»	$-7.71 \cdot 10^{-8}$	$2.14 \cdot 10^{-8}$	88061.73	77047.09	$-1.15 \cdot 10^{-7}$	$3.36 \cdot 10^{-8}$

Пример 3. (продолжение)

Таблица 19. Значения ρ_1 , ρ_2 , ρ_3 , и ρ_4 полученные для орбиты (255447) по методу Гаусса для четырёх наблюдений

Орбита	ρ_1 (а.е.)	ρ_2 (а.е.)	ρ_3 (а.е.)	ρ_4 (а.е.)
«1»	2.107863263793125	1.931314340145706	1.884319003892783	1.894079113703975

Таблица 20. Элементы эллиптической орбиты (255447), полученные по методу Гаусса

M_0 (°)	a (а.е.)	e	i (°)	ω (°)	Ω (°)
320.20291	3.0989504	0.0992067	0.00632	202.57729	310.82271

Таблица 21. Представление наблюдений (O-C) эллиптической орбитой астероида (255447), полученной по методу Гаусса

Наблюдение	$\Delta\alpha$ (")	$\Delta\delta$ (")
«1»	$-4.12 \cdot 10^{-10}$	0.0
«2»	0.25	0.93
«3»	-150.45	-144.06
«4»	$-2.06 \cdot 10^{-10}$	$2.06 \cdot 10^{-11}$

Пример 3. (продолжение)

Таблица 22. Значения ρ_1 , ρ_2 , ρ_3 и ρ_4 полученные из (10) и (15), для различных орбит (255447)

Орбита	ρ_1 (а.е.)	ρ_2 (а.е.)	ρ_3 (а.е.)	ρ_4 (а.е.)
«1»	5.576327548692314	6.749561417868149	8.481469645963319	5.586834045819800
«2»	5.395883437989102	6.604379119232992	3.763941537453924	9.207190291644507
«3»	5.819366226743206	4.937833637100258	4.175266355436231	4.721488637885117
«4»	6.029967840239745	5.167422729091229	5.299591516820302	4.490162171674735
«5»	8.046736613698665	6.753027828215508	15.30306110652061	3.065334182460924
«6»	2.134211576341361	1.953217489318012	1.907188803196791	1.910828562283099
«7»	2.027540092316149	1.860692034218574	1.813248863209804	1.834141811463617

Таблица 23. Элементы орбит малой планеты (255447)

Орбита	T_0 (Дата)/ M_0 (°)	a (а.е.)	e	i (°)	ω (°)	Ω (°)
«1»	2002 03 02.43	-0.008908	26.811786	0.082827	89.76036	288.8600
«2»	2005 09 17.53	-0.003812	35.932914	179.8986	87.51698	286.2422
«3»	2006 11 08.30	-0.305513	1.0900362	0.400434	334.8628	289.3807
«4»	2006 08 03.85	-0.113683	1.0705751	0.809129	201.0100	289.2906
«5»	2006 03 04.54	-0.000507	88.689586	179.7402	269.4684	289.4806
«6»	312.57923	3.1045826	0.1086457	0.006425	212.5798	310.5196
«7»	340.85426	3.0727224	0.0927944	0.006004	176.7660	311.7237
ИПА	312.72678	3.1044627	0.1084302	0.006486	211.9844	310.9263

Пример 3. (продолжение)

Таблица 24. Представление наблюдений (О-С) (255447) полученными орбитами

Орбита	t ₁		t ₂		t ₃		t ₄	
	$\Delta\alpha$ (")	$\Delta\delta$ (")	$\Delta\alpha$ (")	$\Delta\delta$ (")	$\Delta\alpha$ (")	$\Delta\delta$ (")	$\Delta\alpha$ (")	$\Delta\delta$ (")
«1»	$1.5 \cdot 10^{-5}$	$-2.0 \cdot 10^{-6}$	20930.5	14870.7	26010.0	28486.4	$1.5 \cdot 10^{-5}$	$-2.1 \cdot 10^{-6}$
«2»	0.0	$2.1 \cdot 10^{-11}$	1809.0	-5789.6	–	$-1.1 \cdot 10^5$	0.0	$4.1 \cdot 10^{-11}$
«3»	$-8.0 \cdot 10^{-9}$	$9.0 \cdot 10^{-9}$	-5442.1	-5099.6	-32162.4	-16391.2	$-7.3 \cdot 10^{-8}$	$7.6 \cdot 10^{-9}$
«4»	$-5.8 \cdot 10^{-8}$	$3.8 \cdot 10^{-9}$	-1376.9	-1375.1	76808.5	92728.7	$4.4 \cdot 10^{-8}$	$4.4 \cdot 10^{-9}$
«5»	$2.3 \cdot 10^{-7}$	$-3.0 \cdot 10^{-8}$	11632.2	12484.6	8733.5	14288.9	$2.7 \cdot 10^{-7}$	$-3.6 \cdot 10^{-8}$
«6»	$-2.1 \cdot 10^{-10}$	$-6.2 \cdot 10^{-10}$	0.1	-0.4	0.08	0.47	$-6 \cdot 10^{-10}$	$-6 \cdot 10^{-10}$
«7»	$4.1 \cdot 10^{-10}$	$-4.1 \cdot 10^{-11}$	-48.9	6.3	-439.2	-391.2	$4.1 \cdot 10^{-10}$	0.0

Таблица 25. Значения ρ_1 , ρ_2 , ρ_3 и ρ_4 полученные из (10) и (16), для различных орбит (255447)

Орбита	ρ_1 (a.e.)	ρ_2 (a.e.)	ρ_3 (a.e.)	ρ_4 (a.e.)
«1»	5.265119267892835	6.560538063580407	1.691104471082218	20.60438265147873
«2»	2.134220784973440	1.953175039514994	1.907118705510663	1.910720752983413

Таблица 26. Элементы орбит малой планеты (255447)

Орбита	T ₀ (Дата)/ M ₀ (°)	a (a.e.)	e	i (°)	ω (°)	Ω (°)
«1»	2005 11 05.17	-0.003045	52.437698	179.9628	83.67732	282.3752
«2»	122.41851	3.1047621	0.1088630	0.006425	147.3629	310.5189

Выводы

1. Метод определения предварительной орбиты, основывающийся на теореме Ламберта, позволяет определять орбиту для тел с любыми эксцентриситетами, наклонами и интервалами времени между наблюдениями;
2. Метод предоставляет потенциальную возможность поиска решения целевой функции при произвольном количестве наблюдений .

Спасибо за внимание !