

Определение параболической орбиты. Сравнения методов Ольберса и алгебраических уравнений.

В.Б.Кузнецов
Институт Прикладной Астрономии РАН

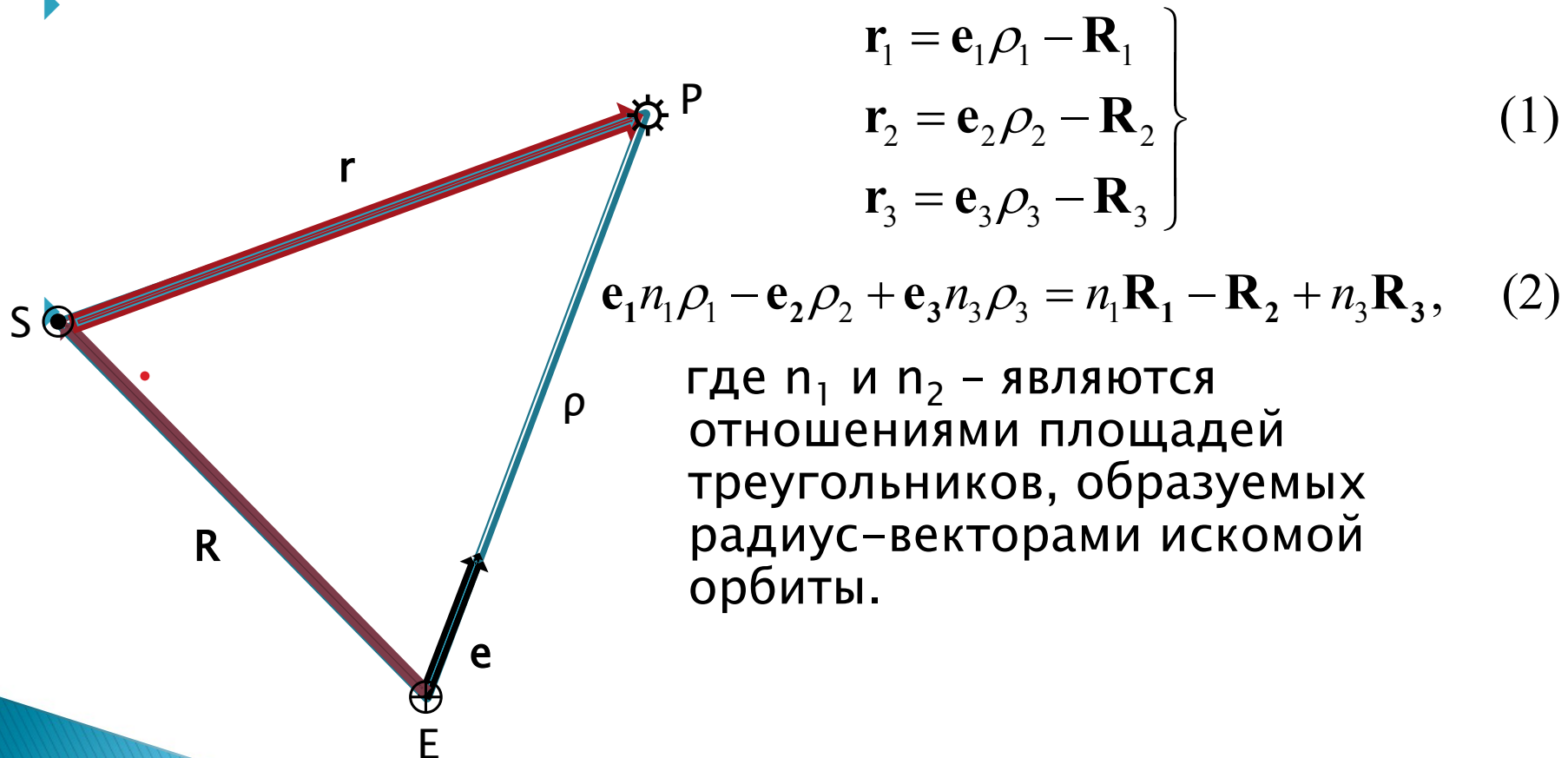
Задача:

- ▶ Определить предварительную параболическую орбиту небесного тела по трём наблюдениям. При этом, промежутки времени между наблюдениями нельзя считать очень малыми. Для комет это означает, что наблюдения сделаны в разные ночи.

Метод Ольберса

(1797 г.)

- ▶ Три наблюдения, в моменты времени t_1 , t_2 и t_3 .



Метод Ольберса (продолжение)

$$\rho_3 = M \rho_1 + m, \quad (3)$$

где $M = K(n_1/n_2)$, $m = L_1 (n_1/n_2) + L_2 (1/n_2) + L_3$. Причём K , L_1 , L_2 , и L_3 зависят только от данных наблюдений и координат наблюдателя.

Уравнение Эйлера (1743):

$$6\tau_{31} = (r_1 + r_3 + s_{31})^{3/2} - (r_1 + r_3 - s_{31})^{3/2}, \quad (4)$$

где $\tau_{31} = k(t_3 - t_1)$, $k = 0.01720209895$ – постоянная Гаусса, s_{31} – длина хорды между векторами r_1 и r_3 .

Начальные приближения:

$$n_1 = \frac{\tau_{32}}{\tau_{31}}, \quad n_2 = \frac{\tau_{21}}{\tau_{31}}. \quad (5)$$

Модификация Субботина

$$2\left(r_1 + r_3 - 2\sqrt{r_1 r_3} \cos\left(\frac{\theta_{31}}{2}\right)\right)\left(r_1 + r_3 + \sqrt{r_1 r_3} \cos\left(\frac{\theta_{31}}{2}\right)\right)^2 = 9\tau_{31}^2, \quad (6)$$

► где θ_{31} – угол между векторами $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_3$.

$$2\left(r_1 + r_3 - 2\sqrt{r_1 r_3} \cos\left(\frac{\theta_{31}}{2}\right)\right)\left(2\left(r_1 + r_3 - 2\sqrt{r_1 r_3} \cos\left(\frac{\theta_{31}}{2}\right)\right) + 6\sqrt{r_1 r_3} \cos\left(\frac{\theta_{31}}{2}\right)\right)^2 = 18\tau_{31}^2. \quad (7)$$

Дальнейшее развитие подхода Субботина

$$\frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{r_1 - \sqrt{2(r_1 r_3 + \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_3)} + r_3} \left(r_1 + \sqrt{\frac{r_1 r_3 + \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_3}{2}} + r_3 \right) = \tau_{31}. \quad (8)$$

Определение параболической орбиты, находящейся вне плоскости эклиптики

Условие компланарности:

$$\mathbf{r}_1(\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3) = 0. \quad (9)$$

$$\rho_2 = -\frac{\mathbf{e}_1(\mathbf{e}_3 \times \mathbf{R}_2)\rho_1\rho_3 + \mathbf{e}_1(\mathbf{R}_2 \times \mathbf{R}_3)\rho_1 - \mathbf{R}_1(\mathbf{e}_3 \times \mathbf{R}_2)\rho_3 - \mathbf{R}_1(\mathbf{R}_2 \times \mathbf{R}_3)}{\mathbf{e}_1(\mathbf{e}_2 \times \mathbf{R}_3)\rho_1\rho_3 - \mathbf{e}_1(\mathbf{e}_2 \times \mathbf{R}_3)\rho_1 - \mathbf{R}_1(\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3)\rho_3 + \mathbf{R}_1(\mathbf{e}_2 \times \mathbf{R}_3)} \geq 0. \quad (10)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{r_1 - \sqrt{2(r_1 r_2 + \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2)}} + r_2 \left(r_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{r_1 r_2 + \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2} + r_2 \right) &= \tau_{21} + kL(\rho_1 - \rho_2) \\ \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{r_2 - \sqrt{2(r_2 r_3 + \mathbf{r}_2 \mathbf{r}_3)}} + r_3 \left(r_2 + \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{r_2 r_3 + \mathbf{r}_2 \mathbf{r}_3} + r_3 \right) &= \tau_{32} + kL(\rho_2 - \rho_3) \end{aligned} \right\}, (11)$$

где $L = 0.00576832$ – аберрационная постоянная.

Определение параболической орбиты, находящейся в плоскости эклиптики

$$p = \frac{r_1 r_3 - \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_3}{r_1 - \sqrt{2(r_1 r_3 + \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_3)} + r_3}. \quad (12)$$

$$r_2 = \frac{p}{2 \cos^2 \frac{\theta_2}{2}}. \quad (13) \quad \theta_2 = \theta_3 - \Delta\theta_{32} \quad \cos^2 \frac{\theta_3}{2} = \frac{p}{2r_3}. \quad (14)$$

Подставим (14) и (15)
в (13)

$$\left. \begin{aligned} \cos \frac{\Delta\theta_{32}}{2} &= \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \frac{\mathbf{r}_2 \mathbf{r}_3}{r_2 r_3}}, \\ \sin \frac{\Delta\theta_{32}}{2} &= \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \frac{\mathbf{r}_2 \mathbf{r}_3}{r_2 r_3}}. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Определение орбиты в плоскости эклиптики (продолжение)

$$\left[p(r_3^2 - \mathbf{r}_2 \mathbf{r}_3) - r_3(r_2 r_3 - \mathbf{r}_2 \mathbf{r}_3) \right]^2 - p(2r_3 - p)(r_2^2 r_3^2 - (\mathbf{r}_2 \mathbf{r}_3)^2) = 0. \quad (16)$$

►
$$\theta_2 = \theta_1 + \Delta\theta_{21}$$

$$\left[p(r_1^2 - \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2) - r_1(r_1 r_2 - \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2) \right]^2 - p(2r_1 - p)(r_1^2 r_2^2 - (\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2)^2) = 0. \quad (17)$$

Выбор решения

$$\Delta\rho = \sqrt{(\rho_1^I - \rho_1^{II})^2 + (\rho_2^I - \rho_2^{II})^2 + (\rho_3^I - \rho_3^{II})^2}. \quad (18)$$

$$f_{goal} = \sum_{i=1}^4 f_i^2. \quad (19)$$

Пример 1. Комета 153P Ikeya-Zhang

Таблица 1. Наблюдения кометы 153P/Ikeya-Zhang

t (UT)	α (2000)	δ (2000)	Обсерватория
2002 02 01.81453	00 09 37.57	-17 26 56.5	Observatorio Astronomico de Mallorca
2002 02 15.76432	00 34 42.49	-09 42 21.3	Observatorio Astronomico de Mallorca
2002 03 01.02934	01 01 31.86	+00 06 55.5	Cordell-Lorenz Observatory, Sewanee

Таблица 2. Значения ρ_1 , ρ_2 и ρ_3 полученные для орбиты 153P/Ikeya-Zhang по методу Ольберса

ρ_1 (a.e.)	ρ_2 (a.e.)	ρ_3 (a.e.)
1.972806745966955	1.908833216898398	1.835953774435512

Таблица 3. Элементы параболической орбиты кометы 153P/Ikeya-Zhang, полученные по методу Ольберса

T_0 (сутки)	$\Delta T_{0(31)}$ (сутки)	q (a.e.)	i (°)	ω (°)	Ω (°)
2002 04 07.51	0	0.96778	41.5529	34.0603	53.8696

Таблица 4. Представление наблюдений (О-С) параболической орбитой кометы 153P/Ikeya-Zhang, полученной по методу Ольберса

Наблюдение	$\Delta\alpha$ (")	$\Delta\delta$ (")
«1»	0.00000267	0.000014
«2»	72.60	-3106.70
«3»	0.00011444	0.000031

Пример 1 (продолжение)

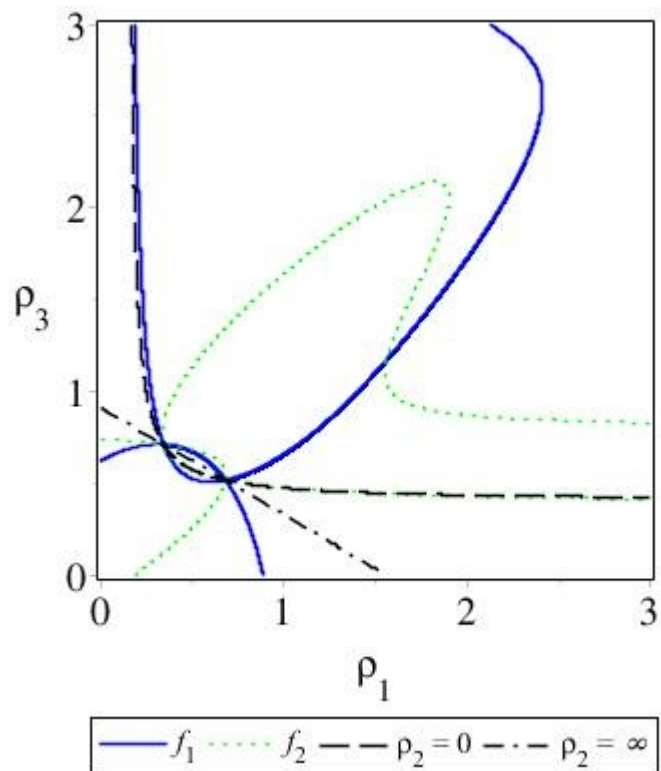


Рис. 1

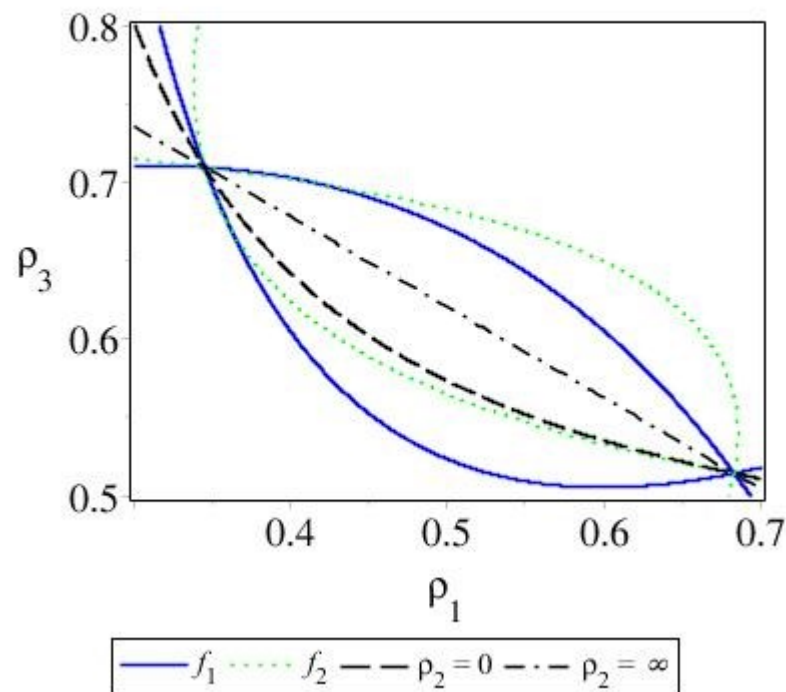


Рис. 2

Пример 1 (продолжение)

Таблица 5. Значения ρ_1 и ρ_3 полученные из (11), а также ρ_2 полученное из (10), для различных орбит 153P/Ikeya-Zhang

Орбита	ρ_1 (а.е.)	ρ_2 (а.е.)	ρ_3 (а.е.)
«1»	0.3631637822781524	0.1677913409960751	0.6681499821240449
«2»	1.559217234505309	1.380172955848541	1.165941060343675
«3»	0.4191828794462177	0.9717524227214030	0.6987890980299119
«ОПТИМ»	1.559217210490263	1.380172914262835	1.165941015093944

Таблица 6. Элементы параболических орбит кометы 153P/Ikeya-Zhang

Орбита	T_0 (сутки)	$\Delta T_{0(31)}$ (сутки)	q (а.е.)	i (°)	ω (°)	Ω (°)
«1»	2002 03 04.64	20.4005	0.0596	13.4270	111.6274	150.3021
«2»	2002 03 18.91	0.0036	0.5087	28.1163	34.3566	93.2088
«3»	2002 03 04.85	20.8618	0.0869	21.8729	114.3020	135.5985
«ОПТИМ»	2002 03 18.91	0.0036	0.5087	28.1163	34.3566	93.2088
MPC	2002 03 18.98	–	0.5071	28.1199	34.6732	93.3703

Пример 1 (продолжение)

Таблица 7. Представление наблюдений (О-С) параболической орбитой кометы 153P/Ikeya-Zhang

Орбита	t_1		t_2		t_3	
	$\Delta\alpha$ (")	$\Delta\delta$ (")	$\Delta\alpha$ (")	$\Delta\delta$ (")	$\Delta\alpha$ (")	$\Delta\delta$ (")
«1»	-164927	-33040.1	-78665.6	39580.41	-1179219	27918.5
«2»	-0.15	2.81	41.77	16.14	-31.08	-3.52
«3»	-150487	-18131.0	12750.1	14956.	-1177381	21435.0
«ОПТИМ»	-0.16	2.82	41.77	16.14	-31.07	-3.52

Таблица 8. Значения ρ_1 , ρ_2 и ρ_3 полученные из (10) и (15), для различных орбит

Орбита	ρ_1 (а.е.)	ρ_2 (а.е.)	ρ_3 (а.е.)
«1»	1.294754894596233	1.766628377935854	1.670296014609637
«2»	1.543935674357442	1.362070434221514	1.143510699024985
«3»	0.8060363004605677	1.343082993118843	1.120104881523956
«4»	1.660458702352456	1.500595247099588	1.317706095835877
«5»	2.074892825306042	2.008143694985012	2.117152052450109
«6»	1.024346315685339	1.535511894295119	1.901451147640691
«7»	0.9425152000183144	0.6864014800154074	1.214196883338576
«8»	0.6131509498602896	0.3775277742983679	0.1748842943616824
«9»	0.2092541556233977	0.04471974611651013	0.5179860255724560

Пример 1 (окончание)

Таблица 9. Минимальные расстояния (18) для орбит таблицы 5

Орбита	Расстояние (а. е.)
«1»	0.2478
«2»	0.0326
«3»	0.6819

Пример 2. Комета 2007 N3 Lulin

Таблица 10. Наблюдения кометы 2007 N3 Lulin

t (UT)	α (2000)	δ (2000)	Обсерватория
2009 01 02.23204	15 59 13.25	-19 39 18.3	Schiaparelli Observatory
2009 02 02.14885	15 09 53.29	-16 54 19.8	Vitebsk
2009 03 01.01008	09 49 34.18	+12 52 28.3	Corner Observatory, Durmersheim

Таблица 11. Значения ρ_1 , ρ_2 и ρ_3 полученные для орбиты 2007 N3 Lulin по методу Ольберса

ρ_1 (a.e.)	ρ_2 (a.e.)	ρ_3 (a.e.)
1.793818796336867	0.9055415552714048	0.4506588025333940

Таблица 12. Элементы параболической орбиты кометы 2007 N3 Lulin, полученные по методу Ольберса

T_0 (сутки)	$\Delta T_{0(31)}$ (сутки)	q (a.e.)	i (°)	ω (°)	Ω (°)
2009 01 10.64	0	1.21226	178.3738	136.8628	338.5341

Пример 2 (продолжение)

Таблица 13. Представление наблюдений (О-С) параболической орбитой кометы 2007 N3 Lulin, полученной по методу Ольберса

Наблюдение	$\Delta\alpha$ (")	$\Delta\delta$ (")
«1»	-0.00000121	$2.22 \cdot 10^{-7}$
«2»	81.96	-19.98
«3»	$2.10 \cdot 10^{-7}$	$8.66 \cdot 10^{-7}$

Таблица 14. Значения ρ_1 , ρ_2 и ρ_3 полученные из (11) и (16), для кометы Lulin

Орбита	ρ_1 (а.е.)	ρ_2 (а.е.)	ρ_3 (а.е.)
«1»	0.8681128445053861	1.012881830753389	0.2863136336876268
«2»	0.7350930110014510	0.9155379089631833	0.4397686988450161
«3»	1.863023558460123	1.040509095700323	0.2068340787517527
«4»	0.3888784680174622	0.6249766864146097	0.6093893262748057
«5»	1.79381747741404725	0.905542160589223660	0.450660349757294720
«6»	1.235977865414559	0.05503962150657955	0.4485472430204604

Пример 2 (продолжение)

Таблица 15. Элементы параболических орбит кометы Lulin

Орбита	T_0 (сутки)	$\Delta T_{0(31)}$ (сутки)	q (а.е.)	i (°)	ω (°)	Ω (°)
«1»	2009 01 03.82	32.5429	0.0158	166.3455	13.0755	337.2650
«2»	2008 12 31.46	25.0119	0.0139	11.0684	11.7781	335.3519
«3»	2009 02 08.58	6.6846	1.1601	178.4061	162.8560	339.3952
«4»	2008 12 14.92	11.7369	0.3661	1.0165	63.0045	329.0469
«5»	2009 01 10.65	$-1 \cdot 10^{-9}$	1.2123	178.3738	136.8626	338.5341
«6»	2008 12 16.62	-7.0023	0.5189	177.4276	75.9217	326.9542
MPC	2009 01 10.64	–	1.2123	178.3736	136.8621	338.5448

Таблица 16. Значения ρ_1 , ρ_2 и ρ_3 полученные из (11) и (17), для кометы Lulin

Орбита	ρ_1 (а.е.)	ρ_2 (а.е.)	ρ_3 (а.е.)
«1»	0.7354260818741434	0.9157912840957141	0.4394848162654464
«2»	0.8482565331105574	0.9988260705872236	0.3166458369586260
«3»	1.793817477416620	0.9055421605939933	0.4506603497522366
«4»	1.662921442364541	0.6775923677089529	0.5949616223201439

Пример 2 (окончание)

Таблица 16. Минимальные расстояния для орбит таблицы 16 и значения целевой функции (19)

Орбита	Расстояние (а. е.)	f_{goal}
«1»	0.0389	$1.8 \cdot 10^{-6}$
«2»	0.0005	$9.0 \cdot 10^{-10}$
«3»	0.2872	$4.7 \cdot 10^{-3}$
«4»	0.4833	$1.0 \cdot 10^{-2}$
«5»	$7.4130 \cdot 10^{-12}$	$1.9 \cdot 10^{-23}$
«6»	0.7690	$2.2 \cdot 10^{-2}$

Выводы

1. Метод алгебраических уравнений имеет преимущество перед методом Ольберса из-за более корректного представления среднего наблюдения;
 2. Использование геометрических соотношений для параболической орбиты позволяет выявить истинное решение среди нескольких возможных, как с помощью определения расстояний, так и в виде минимума целевой функции.
- 

Спасибо за внимание !