

Российская академия наук
Институт прикладной астрономии

Сообщения ИПА РАН

№ 142

В. С. Губанов, И. А. Козлова, И. Ф. Суркис

**Обработка РСДБ-наблюдений:
Программный пакет QUASAR.
II. Методы анализа данных**

Санкт-Петербург
2002

В. С. Губанов, И. А. Козлова, И. Ф. Суркис. Обработка РСДБ-наблюдений: Программный пакет QUASAR. II. Методы анализа данных.

Ключевые слова: Параметрические, стохастические и динамические модели РСДБ-наблюдений, метод наименьших квадратов, фильтрация Калмана, средняя квадратическая коллокация.

Дается краткое описание методов параметрического и стохастического анализа данных РСДБ-наблюдений, полученных на глобальных сетях станций. Эти методы используются в новом многофункциональном программном пакете QUASAR (Quantitative Analysis and Series Adjustment in Radioastrometry) для анализа разностей типа $(O - C)$, полученных в результате редуцированных вычислений по одной и той же программе `reduct.for` [1]. Теоретическое обоснование всех методов дано в монографии [2] и статье [3]. Однако практическое применение пакета QUASAR и опыт других исследовательских групп постоянно стимулирует модернизацию и развитие этих методов с целью их наилучшей адаптации к особенностям РСДБ-наблюдений и получения наилучших окончательных результатов. По-видимому, этот процесс будет продолжаться еще длительное время.

V. S. Gubanov, I. A. Kozlova, I. F. Surkis. Processing of VLBI Observations: Software QUASAR. II. The Data Analysis Techniques.

Keywords: Parametric, stochastic and dynamical models of VLBI observations, Least-Squares method, Kalman filter, Least-Squares Collocation.

The brief description of parametric and stochastic techniques for processing of VLBI observations derived on global networks is presented. These techniques are used in a new multipurpose software QUASAR (Quantitative Analysis and Series Adjustment in Radioastrometry) for analysis of residuals $(O - C)$ obtained by means of one the same procedure `reduct.for` [1]. Theoretical foundation of all these methods is given in monography [2] and paper [3]. However, the practical application of the software QUASAR and the experience of other research groups stimulate continuously the modification and development of these methods with purpose to more complete adaptation to peculiarity of VLBI observation and to receive the best possible final results. Apparently, this process will be continue a long time yet.

Сообщения Института прикладной астрономии РАН № 142 – Санкт-Петербург, 2002. – 30 с.

Содержание

1. Введение	4
2. Линейные модели данных РСДБ-наблюдений	4
2.1. Параметрические модели серий наблюдений	5
2.2. Многогрупповые модели серий наблюдений	5
2.3. Модель наблюдаемой динамической системы	6
2.4. Стохастические модели с параметрами	6
3. Многосерийное параметрическое уравнивание	7
3.1. Двухгрупповой МНК	7
3.2. Стохастическая регуляризация МНК	8
3.3. МНК с точными условиями	9
3.4. МНК со стохастическими условиями	10
3.5. Многогрупповой МНК	11
3.6. Перевзвешивание наблюдений в МНК	13
4. Динамическая фильтрация	15
4.1. Оптимальный фильтр Калмана	15
4.2. Определение начальных условий	16
4.3. Синтез дискретных динамических систем	17
4.4. Двумерные марковские процессы	19
4.5. Фильтр Калмана с условиями	21
4.6. Глобальная фильтрация Калмана	23
5. Средняя квадратическая коллокация	24
5.1. Односерийное уравнивание	24
5.2. Многосерийное уравнивание	25
5.3. Перевзвешивание наблюдений в СКК	26
6. Особенности методов анализа	27
7. Заключение	28
Список литературы	29

1. Введение

За исключением программы *Intensives* и эпизодических экспериментов, РСДБ-наблюдения на глобальных и региональных сетях станций ведутся, как правило, непрерывно суточными сериями. Каждый радиоисточник обычно наблюдается синхронно (совместно) несколькими станциями, поэтому можно получить сразу несколько временных задержек для разных баз. Количество таких совместных наблюдений за сутки достигает 500, а измеренных задержек — несколько тысяч. При корреляционной обработке полученных таким образом магнитных записей сигналов кроме задержек вычисляются еще и их мгновенные производные по времени, а также оцениваются соответствующие средние квадратические ошибки (СКО) этих величин. Благодаря приему сигналов в разнесенных полосах частот, удается также оценить мгновенное значение ионосферной задержки и его ошибку. Кроме того, выходные данные коррелятора содержат кабельную задержку, набор метеопараметров для всех станций, участвовавших в каждом совместном наблюдении и много другой сопутствующей информации, которая концентрируется в базе РСДБ-данных *IVS GSFC* (США) в формате *MARK-III DBH*. Благодаря свободному доступу, она может быть получена через *Internet*. Используя специальный дешифратор [4], пакет *QUASAR* может использовать их как в формате *DBH*, так и в более компактном формате *NGS*. После устранения скачков фазы опорных часов и отбраковки грубо ошибочных наблюдений с помощью специальной полуавтоматической графической системы как составной части входного интерфейса пакета *QUASAR*, вся необходимая информация о наблюдениях концентрируется в собственной базе данных пакета.

После выбора последовательности суточных серий наблюдений, подлежащих дальнейшей совместной обработке, запускаются программы *average.for* и *reduct.for*. Первая из них вычисляет средние за весь выбранный период наблюдений значения метеопараметров, которые в дальнейшем могут играть роль опорных, а вторая — разности ($O - C$), их СКО и полный набор частных производных по всем параметрам, объявленным в описании этой программы [1].

Таким образом, объектом дальнейшего анализа является произвольное количество суточных серий РСДБ-наблюдений с указанным выше набором данных. Задача состоит в том, чтобы, руководствуясь опытом, физическими соображениями и знанием априорной информации, построить математическую модель этих данных, а затем оценить параметры этой модели оптимальным образом. Ниже описываются типовые модели данных и алгоритмы оценивания, используемые в программном пакете *QUASAR*.

2. Линейные модели данных РСДБ-наблюдений

Поскольку при описании линейных моделей удобно пользоваться алгебраическими матрицами и векторами, то мы будем выделять их в тексте полу-

жирным шрифтом: матрицы — прописными буквами, а векторы — строчными. Кроме того, для экономии места компоненты матриц-строк (в том числе и блочных) будем заключать в квадратные скобки, например $\mathbf{R} = [\mathbf{R}_1 \ \mathbf{R}_2 \ \dots]$ или еще более коротко $\mathbf{R} = [\mathbf{R}_i]$, где $i = 1, 2, \dots$, а компоненты векторов-столбцов (в том числе и составных) — в круглые скобки: $\mathbf{r} = (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots) = (\mathbf{r}_i)$.

2.1. Параметрические модели серий наблюдений

Простейшая параметрическая модель данных РСДБ-наблюдений может быть представлена в виде

$$l_k = \mathbf{A}_k \mathbf{x} + \mathbf{B}_k \mathbf{y}_k + \mathbf{r}_k, \quad \mathbf{Q}_k, \quad (1)$$

где $k = 1, 2, \dots, M$ — номер серии наблюдений, $l_k = (l_{i,k})$ — вектор-столбец данных наблюдений типа $(O - C)$ для данной серии, $i = 1, 2, \dots, N_k$ — порядковый номер наблюдения, а N_k — общее число наблюдений в k -серии, $\mathbf{r}_k = (r_{i,k})$ — вектор невязок, которые для полной и точной модели можно отождествить с ошибками наблюдений, $\mathbf{Q}_k = \text{diag}(\sigma_{i,k}^2)$ — известная а priori диагональная матрица дисперсий этих ошибок в серии k , \mathbf{x} — вектор уточняемых параметров, которые не зависят от номера серии k и постоянны в течение всего периода наблюдений, \mathbf{A}_k — матрица частных производных по этим параметрам, \mathbf{y}_k — вектор параметров, постоянных только в течение данной серии наблюдений, \mathbf{B}_k — матрица соответствующих частных производных.

2.2. Многогрупповые модели серий наблюдений

Однако, из практики РСДБ-наблюдений и их обработки известно, что некоторые параметры \mathbf{y}_k модели (1) имеют неустойчивые компоненты, быстро меняющиеся в течение суток. В рамках параметрической модели такие компоненты можно представить или в виде разложений по полиномам Лежандра с постоянными коэффициентами, или в виде кусочно-непрерывных функций, параметры которых постоянны на более коротких интервалах времени, существенно меньших суток. В первом случае коэффициенты полиномов могут быть включены в состав вектора \mathbf{y}_k , и поэтому вид двухгрупповой модели (1) принципиально не меняется. Во втором случае массив данных наблюдений каждой серии разбивается на несколько фрагментов (групп) ($g = 1, 2, \dots, h$), каждая из которых имеет длину N_g , причем $\sum_{g=1}^h N_g = N_k$. Пусть границы групп задаются следующими моментами времени: $t_0, t_1, t_2, \dots, t_h$. Если в данной серии мы имеем m разноименных неустойчивых компонент $f_{j,k}(t)$, ($j = 1, 2, \dots, m$), поведение которых внутри g -й группы описывается ортонормированным полиномиальным разложением с N постоянными коэффициентами $f_{j,k}(\tau_g) = \sum_{n=0}^{N-1} b_{j,g,k,n} P_n(\tau_g)$, где $\tau_g \in [-1, +1]$ — нормированное время в пределах этой группы, то поведение всех компонент внутри любой группы можно представить совокупностью коэффициентов таких разложений в виде вектора-столбца $\mathbf{b}_{g,k} = (b_{j,g,k,n})$, ($j = 0, 2, \dots, m$), ($n = 0, 2, \dots, N - 1$).

Объединяя такие векторы для всех групп, получаем составной вектор параметров неустойчивых компонент $\mathbf{b}_k = (\mathbf{p}_{g,k})$, $(g = 1, 2, \dots, h)$. Тогда модель (1) примет более сложный трехгрупповой вид

$$\mathbf{l}_k = \mathbf{A}_k \mathbf{x} + \mathbf{B}_k \mathbf{y}_k + \mathbf{C}_k \mathbf{b}_k + \mathbf{r}_k, \quad \mathbf{Q}_k, \quad (2)$$

где $\mathbf{C}_k = \text{diag}(\mathbf{C}_{g,k})$ — блочно-диагональная матрица, \mathbf{C}_g — прямоугольные $(N_g \times mN)$ -матрицы.

При многосерийном уравнивании оценке подлежат общие параметры для всех серий \mathbf{x} , параметры для каждой серии \mathbf{y}_k и набор коэффициентов аппроксимации $\mathbf{b}_{g,k}$ для всех неустойчивых компонент внутри каждой группы данных.

2.3. Модель наблюдаемой динамической системы

Вместо параметрической аппроксимации неустойчивых параметров, принятой в моделях (1), (2), иногда удобно в качестве наблюдаемого объекта ввести динамическую систему, состояние которой на всем суточном интервале времени возмущается случайным некоррелированным воздействием типа белого шума. Поскольку совместные РСДБ-наблюдения ведутся в дискретные моменты времени t_i ($i = 1, 2, \dots, n_k$), то мы будем рассматривать лишь дискретные динамические системы вида [2, с. 214]:

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_k(i+1) &= {}_k(i+1, i)\mathbf{z}_k(i) + \mathbf{v}_k(i), \quad \mathbf{S}_k(i), \\ \mathbf{l}_k(i) &= \mathbf{C}_k(i)\mathbf{z}_k(i) + \mathbf{r}_k(i), \quad \mathbf{Q}_k(i), \end{aligned} \quad (3)$$

где $\mathbf{z}_k(i)$ — $(m \times 1)$ -вектор параметров состояния системы в момент t_i , $\mathbf{z}_k(i+1)$ — тот же вектор в следующий момент, $\Phi_k(i+1, i)$ — известная а priori переходная матрица системы размером $m \times m$, связывающая ее настоящее и будущее состояние, $\mathbf{v}_k(i)$ — $(m \times 1)$ -вектор возмущений с известной а priori матрицей дисперсий $\mathbf{S}_k(i)$ диагонального типа, $\mathbf{l}_k(i) = (l_{b,k}(i))$ — $(N_i \times 1)$ -вектор разностей типа $(O - C)$, полученных в одном i -м совместном наблюдении на всех базах ($b = 1, 2, \dots, N_i$), $\mathbf{C}_k(i)$ — $(N_i \times m)$ -матрица частных производных, $\mathbf{r}_k(i)$ — $(N_i \times 1)$ -вектор невязок модели с априорными дисперсиями $\mathbf{Q}_k(i) = \text{diag}[\sigma_{b,k}^2(i)]$. Переходная матрица $\Phi_k(i+1, i)$ может быть построена так, чтобы вектор $\mathbf{z}_k(i)$ мог включать в себя и постоянные параметры $z_{j,k}$, ($j \in [1, m]$), не зависящие от индекса времени i . В этом случае ее j -я строка должна быть нулевой за исключением диагонального элемента, который должен быть равен единице, а соответствующий элемент вектора возмущений — нулю.

2.4. Стохастические модели с параметрами

Вместо множества групповых параметров $\mathbf{p}_{g,k}$ модели (2) стохастическая модель использует в качестве неустойчивых компонент векторов \mathbf{y}_k составной вектор случайных сигналов $\mathbf{s}_k = (\mathbf{s}_{j,k})$ ($j = 1, 2, \dots, m$) длиной mN_k , каждая составляющая которого задана во все моменты наблюдений t_i ($i = 1, 2, \dots, N_k$)

и образует случайную последовательность $\mathbf{s}_{j,k} = (s_{i,j,k})$. Предполагается, что эти последовательности центрированы, нормально распределены и стационарны, а также не зависят друг от друга и от невязок модели \mathbf{r} . Пусть также известна матрица их совместных ковариаций \mathbf{K}_k размером $mN_k \times mN_k$, имеющая блочно-диагональный вид $\mathbf{K}_k = \text{diag}(\mathbf{K}_{j,k})$, где каждая из m матриц $\mathbf{K}_{j,k}$ является полной симметричной $(N_k \times N_k)$ -матрицей тёплицевого вида. Тогда модель (2) можно представить в следующем стохастическом виде:

$$\mathbf{l}_k = \mathbf{A}_k \mathbf{x} + \mathbf{B}_k \mathbf{y}_k + \mathbf{C}_k \mathbf{s}_k + \mathbf{r}_k, \quad \mathbf{K}_k, \mathbf{Q}_k, \quad (4)$$

где $\mathbf{C}_k = [\mathbf{C}_{j,k}]$ ($j = 1, 2, \dots, m$) — блочная составная матрица-строка частных производных по всем сигналам, имеющая размер $(N_k \times mN_k)$, $\mathbf{Q}_k = \text{diag}(\sigma_{i,k}^2)$ — диагональная $(N_k \times N_k)$ -матрица дисперсий невязок.

3. Многосерийное параметрическое уравнение

3.1. Двухгрупповой МНК

Процедура совместного оценивания параметров модели (1) для M серий наблюдений называется многосерийным (глобальным) параметрическим уравнением. Она основана на гипотезе о нормальном распределении случайных векторов невязок \mathbf{r}_k как элементов многомерного фазового пространства случайных событий и на их независимости друг от друга. Если ввести составной вектор $\mathbf{r} = (\mathbf{r}_k)$ и матрицу их взаимных ковариаций $\mathbf{Q} = \text{diag}(\mathbf{Q}_k)$, то плотность вероятности их совместного нормального распределения примет вид

$$L(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{N+M} \det \mathbf{Q}}} \exp\left(-\frac{1}{2} \mathbf{r}' \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{r}\right). \quad (5)$$

Требуется найти такие оценки параметров модели (1), которые доставляли бы максимум этой функции или минимум квадратичной формы $S = (\mathbf{r}' \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{r})$.

Если ввести обозначения: $\mathbf{A} = (\mathbf{A}_k)$ — блочная матрица-столбец, $\mathbf{B} = \text{diag}(\mathbf{B}_k)$ — блочная диагональная матрица, $\mathbf{y} = (\mathbf{y}_k)$ — составной вектор параметров серий, то, как легко убедиться [2, с. 86–87], минимизация функционала S приводит к нормальной системе матричных уравнений в следующей двухгрупповой форме:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F} & \mathbf{H} \\ \mathbf{H}' & \mathbf{G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}} \\ \hat{\mathbf{y}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{g} \end{bmatrix}, \quad (6)$$

где обозначено:

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \mathbf{A}' \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{A} = \sum_{k=1}^M \mathbf{F}_k, & \mathbf{F}_k &= \mathbf{A}'_k \mathbf{Q}_k^{-1} \mathbf{A}_k, \\ \mathbf{G} &= \mathbf{B}' \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{B} = \text{diag}(\mathbf{G}_k), & \mathbf{G}_k &= \mathbf{B}'_k \mathbf{Q}_k^{-1} \mathbf{B}_k, \\ \mathbf{H} &= \mathbf{A}' \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{B} = [\mathbf{H}_k], & \mathbf{H}_k &= \mathbf{A}'_k \mathbf{Q}_k^{-1} \mathbf{B}_k, \\ \mathbf{f} &= \mathbf{A}' \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{l} = \sum_{k=1}^M \mathbf{f}_k, & \mathbf{f}_k &= \mathbf{A}'_k \mathbf{Q}_k^{-1} \mathbf{l}_k, \\ \mathbf{g} &= \mathbf{B}' \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{l} = (\mathbf{g}_k), & \mathbf{g}_k &= \mathbf{B}'_k \mathbf{Q}_k^{-1} \mathbf{l}_k. \end{aligned} \quad (7)$$

Точное решение этой системы дается формулами [2, с. 54–55]:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}} &= \mathbf{D}_{xx}(\mathbf{f} - \mathbf{H}\mathbf{G}^{-1}\mathbf{g}), \\ \hat{\mathbf{y}} &= \mathbf{D}_{yy}(\mathbf{g} - \mathbf{H}'\mathbf{F}^{-1}\mathbf{f}),\end{aligned}\tag{8}$$

где матрицы

$$\begin{aligned}\mathbf{D}_{xx} &= (\mathbf{F} - \mathbf{H}\mathbf{G}^{-1}\mathbf{H}')^{-1}, \\ \mathbf{D}_{yy} &= (\mathbf{G} - \mathbf{H}'\mathbf{F}^{-1}\mathbf{H})^{-1}, \\ \mathbf{D}_{xy} &= -\mathbf{D}_{xx}\mathbf{H}\mathbf{G}^{-1}\end{aligned}\tag{9}$$

представляют собой апостериорные ковариации этих оценок.

Особенность данного метода уравнивания РСДБ-наблюдений состоит в том, что для представления изменчивых в течение суток компонент параметров модели (1) приходится прибегать к их громоздкой аппроксимации разложениями по полиномам Лежандра или Чебышева, что порождает огромное количество параметров, подлежащих оцениванию. По этой причине этот метод иногда называют *многопараметрическим*. В настоящее время он используется редко — предпочтение отдается стохастическому или динамическому моделированию.

3.2. Стохастическая регуляризация МНК

Иногда некоторые компоненты векторов \mathbf{x} , \mathbf{y} а priori представляют собой центрированные случайные величины с известными ковариационными матрицами \mathbf{Q}_x , \mathbf{Q}_y . Тогда оптимальную оценку этих векторов можно найти из условия минимума их апостериорных дисперсий. Можно показать [2, с. 81–86], что это условие равнозначно следующему обобщенному принципу МНК:

$$S = \mathbf{x}'\mathbf{Q}_x^{-1}\mathbf{x} + \mathbf{y}'\mathbf{Q}_y^{-1}\mathbf{y} + \mathbf{r}'\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{r} = \min.,\tag{10}$$

с помощью которого получаем оценки вида (8)

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}}^* &= \mathbf{D}_{xx}^*(\mathbf{f} - \mathbf{H}\mathbf{G}^{-1}\mathbf{g}), \\ \hat{\mathbf{y}}^* &= \mathbf{D}_{yy}^*(\mathbf{g} - \mathbf{H}'\mathbf{F}^{-1}\mathbf{f}),\end{aligned}\tag{11}$$

но с другими апостериорными ковариациями

$$\begin{aligned}\mathbf{D}_{xx}^* &= (\mathbf{F} - \mathbf{H}\mathbf{G}^{-1}\mathbf{H}' + \mathbf{Q}_x^{-1})^{-1}, \\ \mathbf{D}_{yy}^* &= (\mathbf{G} - \mathbf{H}'\mathbf{F}^{-1}\mathbf{H} + \mathbf{Q}_y^{-1})^{-1}, \\ \mathbf{D}_{xy}^* &= -\mathbf{D}_{xx}^*\mathbf{H}\mathbf{G}^{-1}.\end{aligned}\tag{12}$$

В качестве примера параметров, подходящих для применения к ним процедуры регуляризации, можно привести поправки к опорным рядам параметров вращения Земли (ПВЗ), поскольку оценки их точности известны по публикациям IERS, поправки координат радиоисточников и РСДБ-станций, априорная точность которых также известна. В результате применения регуляризации, когда матрицы \mathbf{Q}_x и \mathbf{Q}_y отличны от нулевых, поправки параметров, как правило, получаются меньшими по абсолютной величине, чем без

применения регуляризации, и это эффект тем больше, чем точнее априорные данные. Это говорит о том, что очень точные данные можно уточнить только очень точными наблюдениями. Наоборот, для грубых априорных данных эффект регуляризации незначителен, а в пределе, когда матрицы Q_x^{-1} и Q_y^{-1} стремятся к нулю, процесс регуляризации вырождается и переходит в обыкновенный МНК, оценки которого ничем не ограничены.

3.3. МНК с точными условиями

Некоторые параметры, оцениваемые в результате глобального уравнивания, должны удовлетворять точным ("жестким") условиям, имеющим вид уравнений

$$\mathbf{t} = \mathbf{L}\mathbf{x} + \mathbf{T}\mathbf{y}, \quad (13)$$

где $\mathbf{y} = (\mathbf{y}_k)$ — составной вектор-столбец, $\mathbf{T} = [\mathbf{T}_k]$ — составная матрица-строка ($k = 1, 2, \dots, M$). Включение этих уравнений в процедуру уравнивания осуществляется способом Лагранжа [2, с. 80–81] путем окаймления системы нормальных уравнений (6), в результате чего решение принимает вид

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}} \\ \hat{\mathbf{y}} \\ \hat{\mathbf{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F} & \mathbf{H} & \mathbf{L}' \\ \mathbf{H}' & \mathbf{G} & \mathbf{T}' \\ \mathbf{L} & \mathbf{T} & \mathbf{0} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{g} \\ \mathbf{t} \end{bmatrix}, \quad (14)$$

где \mathbf{q} — вектор неопределенных множителей Лагранжа, длина которого равна числу условных уравнений в системе (13).

В настоящее время в пакете QUASAR используется минимальное число условий [5], [6], гарантирующих стабильность опорных систем координат и ПВЗ, а именно:

1. Сумма поправок координат избранных (основных) станций относительно опорной системы ITRF равна нулю: $\sum_{i=1}^m w_i \Delta \mathbf{r}_i = \mathbf{0}$.
2. Сумма поправок скоростей этих станций относительно системы ITRF равна нулю: $\sum_{i=1}^m w_i \Delta \mathbf{v}_i = \mathbf{0}$.
3. Суммарный поворот основных станций относительно системы ITRF равен нулю: $\sum_{i=1}^m w_i (\mathbf{r}_i \times \Delta \mathbf{r}_i) / r_i^2 = \mathbf{0}$.
4. Суммарная скорость поворота этих станций относительно системы ITRF равна нулю: $\sum_{i=1}^m w_i (\mathbf{r}_i \times \Delta \mathbf{v}_i) / r_i^2 = \mathbf{0}$.
5. Суммарный поворот основных радиоисточников относительно опорной системы ICRF равен нулю: $\sum_{j=1}^n w_j (\mathbf{s}_j \times \Delta \mathbf{s}_j) = \mathbf{0}$.

В этих выражениях $\mathbf{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$ — геоцентрический радиус-вектор станции в земной системе TRS, r — его длина, $\mathbf{v}_i = (v_{x,i}, v_{y,i}, v_{z,i})$ — вектор скорости станции, $\mathbf{s}_j = (\cos \delta_j \cos \alpha_j, \cos \delta_j \sin \alpha_j, \sin \delta_j)$ — единичный вектор направления на источник, i — номер станции, j — номер источника, w_i, w_j — весовые коэффициенты. Если $w_i = w_j = 1$, то соответствующие станции и радиоисточники относятся к числу основных, участвуют в указанных выше условиях и являются "связанными". Если же $w_i = w_j = 0$,

то такие станции и радиисточники не относятся к основным, в условиях не участвуют и являются как бы "свободными".

Если определяемыми параметрами в модели (1) являются поправки координат станций $(\Delta \mathbf{r}_i)_{NEU} = (\Delta n_i, \Delta e_i, \Delta u_i)$ и их скоростей $(\Delta \mathbf{v}_i)_{NEU} = (\Delta v_{n,i}, \Delta v_{e,i}, \Delta v_{u,i})$ не в глобальной системе ITRF, а в локальных системах NEU (см. [1]), то в условиях 1-4 необходимо использовать их поправки, редуцированные из систем NEU в систему TRS: $(\Delta \mathbf{r}_i)_{TRS} = \mathbf{A}(\Delta \mathbf{r}_i)_{NEU}$ и $(\Delta \mathbf{v}_i)_{TRS} = \mathbf{A}(\Delta \mathbf{v}_i)_{NEU}$, где матрица трансформации имеет вид:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\sin B \cos L & -\sin L & \cos B \cos L \\ -\sin B \sin L & \cos L & \cos B \sin L \\ \cos B & 0 & \sin B \end{bmatrix}.$$

Поскольку в пакете QUASAR регулярные компоненты рассинхронизации местных шкал атомного времени с опорной шкалой UTC на суточном интервале представляются в виде полиномиальных разложений $\Delta T_i = \sum_{j=1}^n c_{i,j} P_j(t)$, то для устранения смещения группового хранителя времени этих станций относительно опорной шкалы UTC применяется еще одна группа условий:

$$\sum_{i=1}^m c_{i,0} = \sum_{i=1}^m c_{i,1} = \dots = \sum_{i=1}^m c_{i,n} = 0. \quad (15)$$

Кроме того, для всех троек баз $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$, образующих замкнутые треугольники $\vec{b}_1 + \vec{b}_2 + \vec{b}_3 = 0$, используется условие замыкания разностей $l = (O - C)$:

$$l_1 + l_2 + l_3 = 0. \quad (16)$$

Для удовлетворения этого условия практически получающаяся невязка v пока просто распределяется по всем трем базам равномерно, т.е. вместо (16) используется равенство $(l_1 - v/3) + (l_2 - v/3) + (l_3 - v/3) = 0$, хотя имеются и другие способы применения этого условия.

3.4. МНК со стохастическими условиями

В ряде случаев условия, связывающие оцениваемые параметры, удовлетворяют некоторым уравнениям вида (13) не точно, а с некоторой ошибкой v , ковариация (дисперсия) которой \mathbf{Q}_v известна:

$$\mathbf{t} = \mathbf{L}\mathbf{x} + \mathbf{T}\mathbf{y} + \mathbf{v}, \quad \mathbf{Q}_v. \quad (17)$$

Такие условия, в отличие от "жестких можно назвать стохастическими или "мягкими". Легко показать [2, с. 75], что эти условия можно рассматривать как дополнительную стохастическую информацию о параметрах, и их можно включить в минимизируемую квадратичную форму $S = \mathbf{r}'\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{r} + \mathbf{v}'\mathbf{Q}_v^{-1}\mathbf{v}$, что приводит к следующим оценкам параметров:

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}} \\ \hat{\mathbf{y}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{F}} & \tilde{\mathbf{H}} \\ \tilde{\mathbf{H}}' & \tilde{\mathbf{G}} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{f}} \\ \tilde{\mathbf{g}} \end{bmatrix}, \quad (18)$$

где в сравнении с (14) обозначено: $\tilde{F} = F + L'Q_v^{-1}L$, $\tilde{G} = G + T'Q_v^{-1}T$, $\tilde{H} = H + L'Q_v^{-1}T$, $\tilde{f} = f + L'Q_v^{-1}t$, $\tilde{g} = g + T'Q_v^{-1}t$.

3.5. Многогрупповой МНК

Рассмотрим параметрическую модель (2) и введем следующие обозначения: $\mathbf{y} = (\mathbf{y}_k)$ — составной вектор-столбец индивидуальных параметров всех серий ($k = 1, 2, \dots, M$), $\mathbf{z} = (\mathbf{x}, \mathbf{y})$ — составной вектор-столбец всех постоянных параметров, $\mathbf{b} = (\mathbf{b}_k)$ — составной вектор-столбец всех коэффициентов аппроксимации неустойчивых компонент внутри всех групп данных, $\mathbf{l} = (\mathbf{l}_k)$ — составной вектор-столбец всех данных, $\mathbf{r} = (\mathbf{r}_k)$ — составной вектор-столбец всех невязок модели (2), $\mathbf{A} = (\mathbf{A}_k)$ — составная матрица-столбец, $\mathbf{B} = \text{diag}(\mathbf{B}_k)$ — блочно-диагональная матрица частных производных по постоянным параметрам, $\mathbf{C} = \text{diag}(\mathbf{C}_k)$ — блочно-диагональная матрица частных производных по коэффициентам аппроксимации неустойчивых компонент, $\mathbf{Q} = \text{diag}(\mathbf{Q}_k)$ — аналогичная матрица ковариаций невязок модели. Тогда минимизация квадратичной формы $S = (\mathbf{r}'\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{r})$ приводит к нормальной двухгрупповой системе уравнений, аналогичной (6):

$$\begin{bmatrix} \mathbf{U} & \mathbf{V} \\ \mathbf{V}' & \mathbf{W} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{z}} \\ \hat{\mathbf{b}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{h} \\ \mathbf{p} \end{bmatrix}, \quad (19)$$

где \mathbf{U} — блочная матрица

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{F} & \mathbf{H} \\ \mathbf{H}' & \mathbf{G} \end{bmatrix},$$

используемая в (6) с теми же обозначениями (7). Кроме того в (19) введены: составная матрица-столбец $\mathbf{V} = (\mathbf{A}'\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{C}, \mathbf{B}'\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{C})$, $\mathbf{W} = \mathbf{C}'\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{C}$ — симметричная матрица и новые свободные члены $\mathbf{h} = (\mathbf{f}, \mathbf{g})$, $\mathbf{p} = \mathbf{C}'\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{l}$. Решение системы (19) дается формулами (8)–(9):

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{z}} &= \mathbf{D}_{zz}(\mathbf{h} - \mathbf{V}\mathbf{W}^{-1}\mathbf{p}), \\ \hat{\mathbf{b}} &= \mathbf{D}_{bb}(\mathbf{p} - \mathbf{V}'\mathbf{U}^{-1}\mathbf{h}), \end{aligned} \quad (20)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_{zz} &= (\mathbf{U} - \mathbf{V}\mathbf{W}^{-1}\mathbf{V}')^{-1}, \\ \mathbf{D}_{bb} &= (\mathbf{W} - \mathbf{V}'\mathbf{U}^{-1}\mathbf{V})^{-1}, \\ \mathbf{D}_{zb} &= -\mathbf{D}_{bb}\mathbf{V}\mathbf{W}^{-1}. \end{aligned}$$

Первое из равенств (20) можно записать в форме

$$(\mathbf{U} - \mathbf{V}\mathbf{W}^{-1}\mathbf{V}')\hat{\mathbf{z}} = (\mathbf{h} - \mathbf{V}\mathbf{W}^{-1}\mathbf{p})$$

или с учетом введенных выше обозначений — в двухгрупповом виде (6):

$$\begin{bmatrix} \tilde{F} & \tilde{H} \\ \tilde{H}' & \tilde{G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}} \\ \hat{\mathbf{y}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{f} \\ \tilde{g} \end{bmatrix}, \quad (21)$$

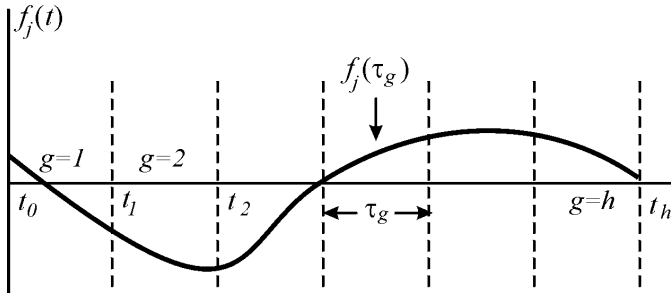


Рис. 1. Неустойчивая компонента на интервале суточной серии и ее деление на фрагменты.

где

$$\begin{aligned}
 \tilde{F} &= F - A'Q^{-1}CW^{-1}C'Q^{-1}A, \\
 \tilde{G} &= G - B'Q^{-1}CW^{-1}C'Q^{-1}B, \\
 \tilde{H} &= H - A'Q^{-1}CW^{-1}C'Q^{-1}B, \\
 \tilde{f} &= f - A'Q^{-1}CW^{-1}C'Q^{-1}l, \\
 \tilde{g} &= g - B'Q^{-1}CW^{-1}C'Q^{-1}l.
 \end{aligned}$$

Раздельное оценивание постоянных параметров \mathbf{x} и $\mathbf{y} = (\mathbf{y}_k)$ осуществляется по формулам (8). В этом решении могут использоваться перевзвешивание наблюдений (п. 3.6), стохастическая регуляризация (п. 3.2) и жесткие условия, относящиеся к постоянным параметрам (п. 3.3). Однако особенностью многогруппового уравнивания является очевидная необходимость использования дополнительных условий, связывающих компоненты вектора \mathbf{b}_g в соседних группах данных, для обеспечения непрерывности функций $f_j(t)$ на всем протяжении суточной серии наблюдений. На рис. 1 схематично показано поведение одной из таких функций и ее деление на фрагменты.

Любая из m функций $f_j(t)$ внутри g -го фрагмента имеет вид $f_j(\tau_g)$ и может быть представлена полиномиальной моделью $f_j(\tau_g) = \sum_{n=0}^N b_{j,g,n} P_n(\tau_g)$, где $N = 3$ — рекомендуемое значение старшей степени полинома Лежандра, τ_g — время, считаемое от середины g -го интервала в диапазоне $\tau_g \in [-1, +1]$. Проблема состоит в том, чтобы получить такие оценки коэффициентов $b_{j,g,0}, b_{j,g,1}, \dots, b_{j,g,N}$, которые гарантировали бы непрерывность искомой функции $f_j(t)$ на границах групп t_1, t_2, \dots, t_{h-1} , а значит, и на всем суточном интервале. Этого можно добиться, введя для каждой функции $f_j(t)$ следующую систему ограничений:

1. Модельные значения функции на границах смежных фрагментов совпадают ($h - 1$ уравнение):

$$\sum_{n=0}^N b_{j,g,n} P_n(\tau_g) |_{\tau_g=+1} = \sum_{n=0}^N b_{j,g+1,n} P_n(\tau_{g+1}) |_{\tau_{g+1}=-1}, \quad (22)$$

$$g = 1, 2, \dots, h-1.$$

2. Значения всех производных порядка $\nu = 1, 2, \dots, N$ модельной функции на границах смежных фрагментов совпадают ($N(h-1)$ уравнение):

$$\sum_{n=\nu}^N b_{j,g,n} \frac{d^{(\nu)}}{d\tau_g^{(\nu)}} P_n(\tau_g) \Big|_{\tau_g=+1} = \sum_{n=\nu}^N b_{j,g+1,n} \frac{d^{(\nu)}}{d\tau_{g+1}^{(\nu)}} P_n(\tau_{g+1}) \Big|_{\tau_{g+1}=-1}, \quad (23)$$

$$g = 1, 2, \dots, h-1; \quad \nu = 1, 2, \dots, N.$$

3. Значения модельной функции в средние моменты фрагментов $\tau_g = 0$ центрированы в данной серии (1 уравнение):

$$\sum_{g=1}^h \sum_{n=0}^N b_{j,g,n} P_n(\tau_g) |_{\tau_g=0} = 0, \quad (n-).$$

4. Значения модельных функций вариаций часов в средний момент каждого фрагмента $\tau_g = 0$ должны быть центрированы по всем станциям $i = 1, 2, \dots, m$ (h уравнений):

$$\sum_{i=1}^m \sum_{n=0}^N b_{j,g,n,i} P_n(\tau_g) |_{tau_g=0} = 0, \quad (n-).$$

$$g = 1, 2, \dots, h.$$

Последние ограничения применяются наряду с аналогичными ограничениями (15) поправок среднесуточных параметров синхронизации часов.

3.6. Перевзвешивание наблюдений в МНК

Рассмотрим упрощенную линейную модель данных наблюдений $\mathbf{l} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{r}$ с известной а priori матрицей дисперсий невязок $\mathbf{Q} = \text{diag}(\sigma_i^2)$, $i = 1, 2, \dots, N$. МНК-оценки параметров этой модели и их апостериорные ковариации имеют вид

$$\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}'\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}'\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{l}, \quad (24)$$

$$\mathbf{D}_{xx} = (\mathbf{A}'\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A})^{-1}.$$

Из этих формул видно, что ковариации \mathbf{D}_{xx} зависят не от невязок модели $\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{l} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}$, а лишь от априорных дисперсий наблюдений, образующих матрицу \mathbf{Q} . Для вычисления более достоверных апостериорных ковариаций параметров

обратимся к общей теории МНК [2, с. 38–43], в которой вместо матрицы \mathbf{Q} используются весовые матрицы $\mathbf{P} = \hat{\sigma}_0^2 \mathbf{Q}^{-1}$:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}} &= (\mathbf{A}'\mathbf{P}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}'\mathbf{P}\mathbf{l}, \\ \mathbf{D}_{xx} &= \hat{\sigma}_0^2(\mathbf{A}'\mathbf{P}\mathbf{A})^{-1},\end{aligned}\quad (25)$$

где $\hat{\sigma}_0^2$ — произвольная априорная оценка дисперсии наблюдения с единичным весом (дисперсия единицы веса), а $\hat{\sigma}_0^2$ — ее апостериорная оценка.

Из формул (24) и (25) видно, что после замены матрицы \mathbf{Q}^{-1} на матрицу $\hat{\sigma}_0^{-2}\mathbf{P}$ МНК-оценки параметров не меняются, поэтому не изменятся и оценки невязок $\hat{\mathbf{r}}$. Имея эти оценки из решения (24), вычислим апостериорную оценку дисперсии единицы веса [2, с. 52]:

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{(\hat{\mathbf{r}}'\mathbf{P}\hat{\mathbf{r}})}{N - m_p + m_c} = \hat{\sigma}_0^2 \chi^2, \quad (26)$$

где

$$\chi^2 = \frac{\hat{\mathbf{r}}'\mathbf{Q}^{-1}\hat{\mathbf{r}}}{N - m_p + m_c} \quad (27)$$

представляет собой безразмерную величину, имеющую χ^2 -распределение, N — количество всех наблюдений в данной серии, m_p — количество оцениваемых параметров, m_c — количество используемых жестких условий. Отсюда получаем:

$$\chi^2 = \frac{\hat{\sigma}_0^2}{\hat{\sigma}_0^2}.$$

Теперь, зная оценку $\hat{\sigma}_0^2$, можно получить новые оценки ковариаций параметров:

$$\tilde{\mathbf{D}}_{xx} = \hat{\sigma}_0^2(\mathbf{A}'\mathbf{P}\mathbf{A})^{-1} = \chi^2(\mathbf{A}'\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{C})^{-1} = \chi^2\mathbf{D}_{xx} = (\mathbf{A}'\tilde{\mathbf{Q}}^{-1}\mathbf{A})^{-1},$$

где $\tilde{\mathbf{Q}} = \chi^2\mathbf{Q}$ — новая матрица ковариаций невязок. С ее использованием критерий χ^2 всегда равен единице:

$$\tilde{\chi}^2 = \frac{\hat{\mathbf{r}}'\tilde{\mathbf{Q}}^{-1}\hat{\mathbf{r}}}{N - m_p + m_c} = \frac{1}{\chi^2} \frac{\hat{\mathbf{r}}'\mathbf{Q}^{-1}\hat{\mathbf{r}}}{N - m_p + m_c} = \frac{\chi^2}{\chi^2} \equiv 1.$$

Формулы (26) и (27) показывают, что приведенный выше алгоритм годится не только для диагональных, но и для полных матриц \mathbf{Q} и \mathbf{P} .

Что касается априорных дисперсий невязок, то их обычно вычисляют по формуле $\sigma_i^2 = \sigma_{i,OBS}^2 + \sigma_{i,ION}^2 + \sigma_{i,ADD}^2$, где $\sigma_{i,OBS}^2$ — наблюдаемая дисперсия задержки, получаемая в процессе корреляционной обработки записей сигналов (ее иногда называют “аппаратурной” дисперсией), $\sigma_{i,ION}^2$ — дисперсия ионосферной поправки, также получаемая с помощью коррелятора из анализа задержек в разнесенных полосах частот, $\sigma_{i,ADD}^2$ — дополнительная дисперсия, которая иногда вводится для сближения внутренней и внешней ошибок данных наблюдений. В эту формулу еще часто вводят зависимость $\sigma_{i,OBS}^2$ от зенитного расстояния, пропорциональную $\sec z_{max}$, когда z_{max} на одной из станций данной базы превышает 75° .

4. Динамическая фильтрация

Модель наблюдаемой дискретной динамической системы дается уравнениями (3). Решение этих уравнений, то есть определение фазового вектора $\hat{\mathbf{z}}(i)$, описывающее состояние этой системы для всех моментов совместных наблюдений t_i ($i = 1, 2, \dots, n_k$), выполненных в течение одной из суточных серий, осуществляется путем рекуррентного процесса, называемого фильтром Калмана (индекс серии k в дальнейшем для краткости будем опускать). Основная проблема состоит в том, чтобы правильно запустить этот процесс, то есть определить (синтезировать) параметры динамической системы и оценить ее начальное состояние.

4.1. Оптимальный фильтр Калмана

Предположим, что состояние динамической системы (3) в произвольный момент времени t_i известно, и требуется определить его для следующего момента t_{i+1} . В этом случае алгоритм оптимальной фильтрации Калмана (ОФК) сводится к следующему [2, с. 227]:

1. Строим приближенный прогноз фазового вектора, не учитывающий возмущений системы, и его ковариацию на момент t_{i+1} :

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{z}}_*(i+1) &= \mathbf{\Phi}(i+1, i)\hat{\mathbf{z}}(i), \\ \mathbf{D}_*(i+1) &= \mathbf{\Phi}(i+1, i)\mathbf{D}(i)\mathbf{\Phi}'(i+1, i) + \mathbf{S}(i).\end{aligned}\quad (28)$$

2. В момент t_{i+1} выполняется новое совместное наблюдение:

$$\mathbf{l}(i+1) = \mathbf{C}(i+1)\mathbf{z}(i+1) + \mathbf{r}(i+1), \quad \mathbf{Q}(i+1).\quad (29)$$

3. С его помощью получаем две эквивалентные формулы уточненного прогноза (28):

$$\hat{\mathbf{z}}(i+1) = \hat{\mathbf{z}}_*(i+1) + \mathbf{R}(i+1)[\mathbf{l}(i+1) - \mathbf{C}(i+1)\hat{\mathbf{z}}_*(i+1)],\quad (30)$$

$$\hat{\mathbf{z}}(i+1) = \mathbf{D}(i+1)[\mathbf{D}_*^{-1}(i+1)\hat{\mathbf{z}}_*(i+1) + \mathbf{C}'(i+1)\mathbf{Q}^{-1}(i+1)\mathbf{l}(i+1)],\quad (31)$$

где

$$\mathbf{D}(i+1) = \mathbf{D}_*(i+1) - \mathbf{R}(i+1)\mathbf{C}(i+1)\mathbf{D}_*(i+1)\quad (32)$$

есть уточненная ковариация оценок $\hat{\mathbf{z}}(i+1)$, а

$$\mathbf{R}(i+1) = \frac{\mathbf{D}_*(i+1)\mathbf{C}'(i+1) \times}{[\mathbf{C}(i+1)\mathbf{D}_*(i+1)\mathbf{C}'(i+1) + \mathbf{Q}(i+1)]^{-1}}\quad (33)$$

называется матрицей усиления.

4.2. Определение начальных условий

Если в начальный момент t_1 первого сложного наблюдения выполнено достаточно большое количество совместных наблюдений

$$\mathbf{l}(1) = \mathbf{C}(1)\mathbf{z}(1) + \mathbf{r}(1), \quad \mathbf{Q}(1),$$

превышающее количество компонент фазового вектора \mathbf{z} , так что $N_1 > m$ и матрица $\mathbf{C}(1)$ имеет полный ранг, то начальную оценку этого вектора можно получить методом наименьших квадратов:

$$\hat{\mathbf{z}}_1(1) = [\mathbf{C}'(1)\mathbf{Q}^{-1}(1)\mathbf{C}(1)]^{-1}\mathbf{C}'(1)\mathbf{Q}^{-1}(1)\mathbf{l}(1). \quad (34)$$

Если же наблюдений в момент t_1 выполнено недостаточно ($N_1 < m$), но для фазового вектора $\mathbf{z}(1)$ известна его априорная матрица ковариаций $\mathbf{K}(1) = E\{\mathbf{z}(1)\mathbf{z}'(1)\}$, то мы можем применить алгоритм регуляризации МНК (см. п. 3.2):

$$\hat{\mathbf{z}}_2(1) = [\mathbf{C}'(1)\mathbf{Q}^{-1}(1)\mathbf{C}(1) + \mathbf{K}^{-1}(1)]^{-1}\mathbf{C}'(1)\mathbf{Q}^{-1}(1)\mathbf{l}(1) \quad (35)$$

или использовать оптимальную МНК-оценку [2, с. 67]:

$$\hat{\mathbf{z}}_3(1) = \mathbf{K}(1)\mathbf{C}'(1)[\mathbf{C}(1)\mathbf{K}(1)\mathbf{C}'(1) + \mathbf{Q}(1)]^{-1}\mathbf{l}(1). \quad (36)$$

Оценки (34) и (35) следуют из принципа минимума квадратичных форм $S_1 = \mathbf{r}'(1)\mathbf{Q}^{-1}(1)\mathbf{r}(1)$ и $S_2 = S_1 + \mathbf{z}'(1)\mathbf{K}^{-1}(1)\mathbf{z}(1)$, соответственно, а оценка (36) — из принципа минимума дисперсии ошибок оценивания фазового вектора.

Поскольку матрица $\mathbf{K}(1)$ не вырождена и положительно определена, то оценки (35) и (36) полностью идентичны, и, кроме того, можно показать, что

$$\hat{\mathbf{z}}_{2,3}(1) = \hat{\mathbf{z}}_1(1) - \mathbf{D}_1(1)[\mathbf{D}_1(1) + \mathbf{K}(1)]^{-1}\hat{\mathbf{z}}_1(1),$$

где $\mathbf{D}_1(1) = [\mathbf{C}'(1)\mathbf{Q}^{-1}(1)\mathbf{C}(1)]^{-1}$ — апостериорная дисперсия оценки $\hat{\mathbf{z}}_1(1)$. Отсюда видно, что при $\|\mathbf{K}(1)\| \rightarrow 0$ $\hat{\mathbf{z}}_{2,3}(1) \rightarrow \mathbf{0}$, а при $\|\mathbf{K}(1)\| \rightarrow \infty$ $\hat{\mathbf{z}}_{2,3}(1) \rightarrow \hat{\mathbf{z}}_1(1)$ при условии, конечно, что оценка $\hat{\mathbf{z}}_1(1)$ существует. Сравнивая (36) с (30) и (33) и полагая $\hat{\mathbf{z}}_*(1) = \mathbf{0}$, $\mathbf{D}_*(1) = \mathbf{K}(1)$, находим

$$\hat{\mathbf{z}}(1) = \hat{\mathbf{z}}_3(1) = \mathbf{R}(1)\mathbf{l}(1), \quad (37)$$

с апостериорной ковариацией

$$\mathbf{D}(1) = \mathbf{D}_*(1) - \mathbf{R}(1)\mathbf{C}(1)\mathbf{D}_*(1) \quad (38)$$

и матрицей усиления

$$\mathbf{R}(1) = \mathbf{D}_*(1)\mathbf{C}'(1)[\mathbf{C}(1)\mathbf{D}_*(1)\mathbf{C}'(1) + \mathbf{Q}(1)]^{-1}.$$

Теперь оценку (37) и ее ковариацию (38) можно принять в качестве начальных условий для описанного выше рекуррентного алгоритма фильтра

Калмана. Основным практическим неудобством этого алгоритма является условие о равенстве нулю математического ожидания начального значения фазового вектора, т.е. $E\{\mathbf{z}(1)\} = 0$. Это условие можно обойти, если математическое ожидание известно и равно $\mathbf{z}_0(1)$. Его приближенное значение можно оценить методом наименьших квадратов и затем исключить из всех данных наблюдений. Анализ остаточных невязок методом ОФК даст малые поправки к этим оценкам. Однако этого можно и не делать, а принять вместо (37) $\hat{\mathbf{z}}(1) = \mathbf{z}_0(1)$, поскольку алгоритм ОФК (28)–(33) полностью сохраняется и в этом случае [2, с. 225–229], а последовательные оценки фазового вектора остаются несмещенными и имеют минимальную дисперсию. Свойство несмещенности означает [2, с. 228], что последовательности ошибок оценивания $\Delta\mathbf{z}(i) = \mathbf{z}(i) - \hat{\mathbf{z}}(i)$ и экстраполяции $\Delta\mathbf{z}_*(i) = \mathbf{z}(i) - \hat{\mathbf{z}}_*(i)$ имеют нулевое математическое ожидание для любых $i = 1, 2, \dots$ независимо от априорного начального значения фазового вектора $\mathbf{z}_0(1)$.

4.3. Синтез дискретных динамических систем

Динамическая система вида (3)

$$\mathbf{z}_k(i+1) = \mathbf{\Phi}_k(i+1, i)\mathbf{z}_k(i) + \mathbf{v}_k(i) \quad (39)$$

представляет собой дискретную запись частного решения дифференциального уравнения 1-го порядка:

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{F}(t)\mathbf{z}(t) + \mathbf{w}(t), \quad (40)$$

где $\mathbf{F}(t)$ — непрерывная переходная матрица, $\mathbf{w}(t)$ — вектор непрерывного белого шума, каждая компонента которого $w_j(t)$ независима и имеет ковариацию типа δ -функции:

$$\delta(t_{i+1} - t_i) = \delta(\tau_i) = \begin{cases} 0 & \tau_i \neq 0, \\ 1 & \tau_i = 0. \end{cases}$$

В дальнейшем мы будем рассматривать только стационарные динамические системы, в которых переходные матрицы постоянны $\mathbf{F}(t) = \mathbf{F}$, а возмущения $\mathbf{w}(t)$ являются стационарным белым шумом. При этих условиях в результате интегрирования уравнения (40) имеем [2, с. 212–213]:

$$\mathbf{\Phi}(t_{i+1}, t_i) = \exp \left\{ \int_{t_i}^{t_{i+1}} \mathbf{F} dt \right\} = \exp \{ \tau_i \mathbf{F} \} \quad (41)$$

и, кроме того,

$$\mathbf{v}(i) = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \mathbf{\Phi}(t_{i+1}, \theta) \mathbf{v}(\theta) d\theta.$$

Если интегрированный таким образом белый шум $\mathbf{v}(i)$ является нормальным, то есть “белым шумом в узком смысле” то все его значения в разные моменты времени будут независимыми по вероятности, что не исключает их

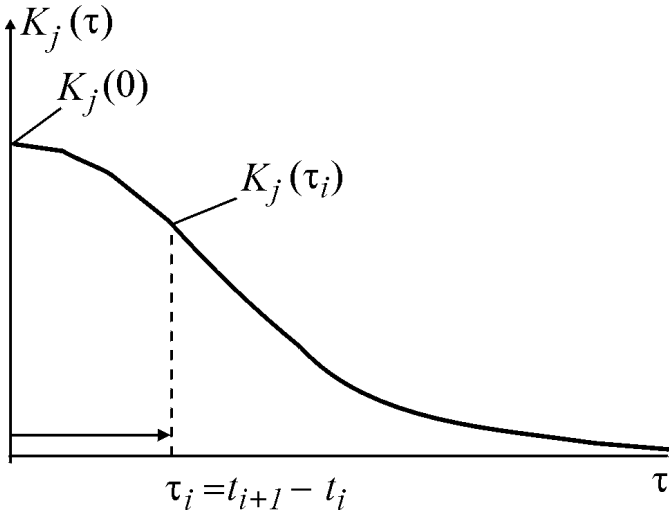


Рис. 2. К вычислению корреляции фазового вектора для соседних моментов времени.

коррелированности [7, с. 257]. Эти условия являются достаточными для того, чтобы решение (39) представляло собой марковский процесс с экспоненциальной ковариационной функцией [2, с. 248], [7, с. 264]:

$$\mathbf{K}(\tau_i) = \exp\{\tau_i \mathbf{F}\} \mathbf{K}(0), \quad (42)$$

где $\mathbf{K}(0)$ — дисперсия марковского процесса. Тогда

$$\Phi(i+1, i) = \Phi(\tau_i) = \mathbf{K}(\tau_i) \mathbf{K}^{-1}(0). \quad (43)$$

Выражение (43) дает простой способ вычисления переходной матрицы марковского процесса, если известна а priori его ковариационная матрица $\mathbf{K}(\tau_i)$. Кроме того, можно показать [2, с. 241], что через эту матрицу легко вычисляется и ковариация возмущений:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(\tau_i) &= \mathbf{K}(\tau_i) - \Phi(\tau_i) \mathbf{K}(0) \Phi'(\tau_i) = \\ &= \mathbf{K}(\tau_i) - \mathbf{K}(\tau_i) \mathbf{K}^{-1}(0) \mathbf{K}'(\tau_i). \end{aligned} \quad (44)$$

Если вместо матрицы $\mathbf{K}(\tau_i)$ известна, например из теоретических соображений, переходная матрица непрерывного процесса \mathbf{F} , то можно воспользоваться формулой (41), но в этом случае для вычисления $\mathbf{S}(\tau_i)$ необходимо задаться дисперсией процесса $\mathbf{K}(0)$.

На рис. 2 показан пример автоковариационной функции $K_j(\tau)$ ($\tau \in [0, 1]$ суток) для j -й компоненты стационарного фазового вектора $\mathbf{z}_j(i)$ и способ вычисления ковариаций для соседней пары его элементов.

Если $\tau_i \rightarrow 0$, то $\Phi(\tau_i) \rightarrow \mathbf{I}$ и $\mathbf{S}(\tau_i) \rightarrow \mathbf{0}$, поэтому динамическая система полностью вырождается, а алгоритм фильтрации Калмана превращается в

рекуррентный МНК с постоянными параметрами [2, с. 107]. Однако в некоторых программных пакетах принимается $\Phi(\tau_i) \equiv \mathbf{I}$, а элементы матрицы $\mathbf{S}(\tau_i)$ задаются довольно произвольно на основании общих физических соображений. Между тем, легко видеть, что в этом случае процесс (39) принимает вид

$$\mathbf{z}(i+1) = \mathbf{z}(i) + \mathbf{v}(i), \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad \mathbf{S}(i) \neq 0$$

или

$$\begin{aligned} \mathbf{z}(1) &= \mathbf{z}(1), \\ \mathbf{z}(2) &= \mathbf{z}(1) + \mathbf{v}(1), \\ \dots &\dots \dots \\ \mathbf{z}(n_k) &= \mathbf{z}(1) + \mathbf{v}(1) + \mathbf{v}(2) + \dots + \mathbf{v}(n_k - 1), \end{aligned}$$

и превращается, таким образом, в нестационарный процесс случайных блужданий. Даже если случайные приращения $\mathbf{v}(i)$ остаются стационарными с постоянными значениями дисперсии σ_v^2 и среднего $\bar{\mathbf{v}} \neq 0$, то с возрастанием времени этот процесс начинает осциллировать около прямой $\mathbf{z}(i) = \mathbf{z}(1) + (i-1)\bar{\mathbf{v}}$ со все более увеличивающейся амплитудой, так как его дисперсия также линейно растет: $\sigma_z^2(i) = (i-1)\sigma_v^2$ (см. [8, с. 188–189]). Не совсем ясно, почему такая явно неподходящая модель используется для описания внутрисуточных вариаций параметров модели РСДБ-наблюдений.

4.4. Двумерные марковские процессы

Предварительная информация о стохастических компонентах неустойчивых параметров модели РСДБ-наблюдений, называемых в дальнейшем сигналами, была получена из их оценок методом средней квадратической коллокации (СКК) по данным наблюдений по программе CONT'94 [2, с. 268, 277, 282], а затем была уточнена по данным постоянной наблюдательной программы NEOS-A за 1993–2000 гг. Эти результаты показывают, что автоковариации всех сигналов можно представить следующей обобщенной формулой:

$$K_{СКК}(\tau) = \sigma^2 \sum_{n=0}^m \frac{b_n}{\cos \phi_n} e^{-\alpha_n |\tau|} \cos(\beta_n \tau + \phi_n), \quad (45)$$

где β_n — круговая частота n -ой компоненты ковариационной функции, $\alpha_n > 0$ — параметр ее затухания, b_n — безразмерные коэффициенты, удовлетворяющие соотношению $\sum_{n=0}^m b_n = 1$ и характеризующие долю каждой компоненты в полной дисперсии сигнала σ^2 , ϕ_n — фаза, причем для обеспечения положительной определенности функции $K(\tau)$, необходимой для метода СКК, требуется, чтобы $|\phi_n| \leq |\arctan(\alpha_n/\beta_n)|$.

Функция (45) полностью используется в методе СКК, в то время как для фильтрации Калмана, в силу описанных выше особенностей марковских процессов, подходит лишь экспоненциальная компонента этой функции $K(\tau) = \sigma^2 b_0 \exp\{-\alpha_0 \tau\}$, соответствующая нулевой частоте $\beta_0 = 0$. Однако

оказалось, что коэффициенты b_0 весьма малы даже для самых энергичных сигналов и не превышают 0.25, что совершенно неприемлемо. Иначе говоря, СКК-оценки стохастических компонент линейной модели РСДБ-наблюдений не являются марковскими процессами, и поэтому они не могут быть выделены фильтраций Калмана как векторы состояния динамических систем 1-го порядка, возмущаемых белым шумом.

Для выхода из этой ситуации имеется два способа. Один из них состоит в обобщении модели наблюдаемой динамической системы 1-го порядка на случай ее возмущения "цветным" шумом [2, с. 215]. Если ковариации такого шума известны, то его, в свою очередь, можно представить как вектор состояния некоторой дополнительной динамической системы 1-го порядка, возмущаемой заведомо

только белым шумом. Такая двухступенчатая модель может быть приведена к стандартному виду (3) и использована для построения оптимального фильтра Калмана, в процессе которого оцениваются одновременно векторы состояния обеих динамических систем, т.е. не только искомый сигнал, но и возмущающий его "цветной" шум. Однако нам неизвестны случаи применения этого метода на практике, что, по-видимому, связано с трудностями синтеза вспомогательной динамической системы для "цветного" шума и определения для нее начальных условий.

Второй способ не требует введения "цветного" шума и соответствующей ему динамической системы. Из теории марковских процессов известно [7, с. 285–305], что если стационарный процесс $u(t)$ имеет непрерывную производную $\dot{u}(t) = du(t)/dt = v(t)$, то двумерный процесс $z(t) = (u(t), v(t))$ является марковским, так как поведение такого процесса в будущем полностью определяется его начальными условиями и не зависит от его поведения в прошлом.

Для существования производной процесса $u(t)$ необходимо, чтобы его автоковариационная функция $K_{uu}(\tau)$ имела вторую производную $d^2K_{uu}(\tau)/d\tau^2$, непрерывную в точке $\tau = 0$. Именно таким свойством обладают функции вида

$$K_{uu}(\tau) = \sigma^2 \sum_{n=1}^m b_n e^{-\alpha_n |\tau|} (\cos \beta_n \tau + \frac{\alpha_n}{\beta_n} \sin \beta_n |\tau|) = \sum_{n=1}^m K_{uu}(\tau)_n. \quad (46)$$

Действительно, согласно [7, с. 38–40, 63], имеем

$$K_{vv}(\tau) = -\frac{d^2}{d\tau^2} K_{uu}(\tau) = \sum_{n=1}^m (\alpha_n^2 + \beta_n^2) K_{uu}(\tau)_n, \quad (47)$$

$$K_{uv}(\tau) = -K_{vu}(\tau) = \frac{d}{d\tau} K_{uu}(\tau) = -\sigma^2 \sum_{n=1}^m b_n \frac{\alpha_n^2 + \beta_n^2}{\beta_n} e^{-\alpha_n |\tau|} \sin \beta_n \tau, \quad (48)$$

где $-\infty \leq \tau \leq +\infty$, $\beta_n \neq 0$ и $\sum_{n=1}^m b_n = 1$.

Полагая в этих формулах $\tau = 0$, находим соответствующие дисперсии:

$$K_{uu}(0) = \sigma^2, \quad K_{vv}(0) = \sigma^2 \sum_{n=1}^m b_n (\alpha_n^2 + \beta_n^2), \quad K_{uv}(0) = K_{vu}(0) = 0,$$

после чего для процесса $z(t)$ можно по формуле (43) построить переходную недиагональную и кососимметричную матрицу

$$(i+1, i) = \begin{bmatrix} K_{uu}(\tau_i) & K_{uv}(\tau_i) \\ K_{vu}(\tau_i) & K_{vv}(\tau_i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_{uu}(0) & 0 \\ 0 & K_{vv}(0) \end{bmatrix}^{-1}, \quad (49)$$

а по формуле (44) — соответствующую матрицу ковариаций возмущений $S(\tau_i)$. Принимая затем для начального момента t_1 в качестве априорных значений компонент двумерного процесса $u(1), v(1)$ и их дисперсий $\sigma_u^2(1), \sigma_v^2(1)$ предварительные МНК-оценки (см. раздел 4.2), по формулам (37) и (38) находим начальные условия этого процесса, что позволяет включить его в рекуррентный алгоритм ОФК (30)–(33).

При этом следует заметить, что поскольку обе компоненты $z(t)$ являются стохастическими и их ковариации определены формулами (46)–(48), то при наличии связей между ними можно использовать как жесткие так и стохастические условия (см. разделы 3.3–3.4).

4.5. Фильтр Калмана с условиями

Одна из основных особенностей обработки РСДБ-наблюдений заключается в том, что параметры рассинхронизации шкал времени РСДБ-станций, которые могут достигать очень больших величин, совсем неизвестны а priori, и их приходится определять из самих наблюдений вместе с другими малыми параметрами и сигналами. Это можно сделать только в двух случаях, когда: 1) одна из станций, участвующих в наблюдениях данной суточной серии, принимается за опорную, 2) на все параметры синхронизации всех станций накладывается жесткое условие (15).

Однако в случае применения рекуррентного алгоритма ФК возникают дополнительные проблемы: а) любая станция, выбранная за опорную, как правило, участвует не во всех совместных наблюдениях; б) состав станций, участвующих в разных совместных наблюдениях, различен. В связи с этим, при реализации возможности (1) мы вынуждены отбрасывать все совместные наблюдения, в которых не участвует опорная станция, а при использовании возможности (2) нужно исключать все неполные совместные наблюдения, в которых наблюдали не все станции, что еще хуже.

Тем не менее, в пакете QUASAR, в настоящее время реализуется именно способ жестких условий. Основанием для этого служат следующие соображения. Поскольку в наших условиях результаты РСДБ-наблюдений данной серии известны нам все сразу, то целесообразно обработать их предварительно методом наименьших квадратов с определением ПВЗ, тропосферной задержки в зените и параметров синхронизации часов всех станций, принимавших участие в наблюдениях данной серии, с обязательным использованием условий (15). Эти оценки можно принять в качестве начального приближения искомым параметрам, а затем, с помощью фильтра Калмана найти к ним малые поправки. Таким образом, для каждого момента совместных наблюдений t_i

мы будем иметь поправки синхронизации часов, удовлетворяющие условию (15), для всех станций, даже не наблюдавших в момент t_i .

С другой стороны, алгоритм оптимальной фильтрации Калмана позволяет получить для любого момента совместных наблюдений все поправки синхронизации часов (как, впрочем, и других параметров) для всех станций, даже если некоторые из них в этот момент и не участвовали в наблюдениях. Действительно, формулы (28)–(33) показывают, что для станций–участниц наблюдения (29) в момент t_{i+1} , мы получаем уточненную оценку параметров $\hat{\mathbf{z}}(i+1)$ по формулам (30) или (31) с ковариацией $\mathbf{D}(i+1)$, а для тех, которые не вели в этот момент наблюдений, — только прогноз $\hat{\mathbf{z}}_*(i+1)$ по формуле (28) с ковариацией $\mathbf{D}_*(i+1)$. Таким образом, в обоих случаях оценки параметров синхронизации часов всех станций находятся для любого момента наблюдений, и на них может быть наложено жесткое условие (15). Для этого удобно уравнение (31) переписать в виде

$$\mathbf{U}(i+1)\hat{\mathbf{z}}(i+1) = \mathbf{h}(i+1), \quad (50)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{U}(i+1) &= \mathbf{D}^{-1}(i+1), \\ \mathbf{h}(i+1) &= \mathbf{D}_*^{-1}(i+1)\hat{\mathbf{z}}_*(i+1) + \mathbf{C}'(i+1)\mathbf{Q}^{-1}(i+1)\mathbf{l}(i+1). \end{aligned}$$

После этого, записывая условия (15) в виде системы уравнений

$$\mathbf{t}(i+1) = \mathbf{E}(i+1)\hat{\mathbf{z}}(i+1) \quad (51)$$

и производя окаймление системы (50) по правилу Лагранжа (см. раздел 3.4), получаем новую нормальную систему

$$\begin{bmatrix} \mathbf{U}(i+1) & \mathbf{E}'(i+1) \\ \mathbf{E}(i+1) & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{z}(i+1) \\ \mathbf{q}(i+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}(i+1) \\ \mathbf{t}(i+1) \end{bmatrix}, \quad (52)$$

решение которой дает

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{z}}(i+1) \\ \hat{\mathbf{q}}(i+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{U}}(i+1) & \mathbf{V}(i+1) \\ \mathbf{V}'(i+1) & \mathbf{W}(i+1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{h}(i+1) \\ \mathbf{t}(i+1) \end{bmatrix}, \quad (53)$$

Принимая теперь $\hat{\mathbf{z}}(i+1)$ за окончательную оценку фазового вектора на момент t_{i+1} , а $\tilde{\mathbf{D}}(i+1) = \tilde{\mathbf{U}}^{-1}(i+1)$ за ее ковариацию, рекуррентный процесс ОФК может быть продолжен дальше.

Как нетрудно заметить, описанная выше процедура учета жестких условий предъявляет повышенные требования к оценке начальных значений параметров синхронизации часов. Нулевые значения для этого явно не подходят. Лучше всего их получить из предварительной обработки всей серии наблюдений параметрическим методом наименьших квадратов с соблюдением условий (15).

Учитывая, что на ранних стадиях процесса фильтрации поправки синхронизации часов будут определяться с низкой точностью, особенно если

некоторые станции приступили к наблюдениям со значительным опозданием, представляется возможным вместо “жестких” условий (51) использовать “мягкие” условия вида

$$\mathbf{t}(i+1) = \mathbf{E}(i+1)\hat{\mathbf{z}}(i+1) + \mathbf{v}(i+1), \quad \mathbf{Q}_v(i+1),$$

где матрица $\mathbf{Q}_v(i+1)$ может быть задана а priori или вычислена по формуле:

$$\mathbf{Q}_v(i+1) = \mathbf{E}(i+1)\mathbf{D}_*(i+1)\mathbf{E}'(i+1).$$

Тогда оценка поправок синхронизации часов примет вид (18)

$$\hat{\mathbf{z}}(i+1) = \tilde{\mathbf{D}}(i+1)\tilde{\mathbf{h}}(i+1),$$

где

$$\tilde{\mathbf{D}}(i+1) = [\mathbf{U}(i+1) + \mathbf{E}'(i+1)\mathbf{Q}_v^{-1}(i+1)\mathbf{E}(i+1)]^{-1}$$

есть дисперсия этой оценки и

$$\tilde{\mathbf{h}}(i+1) = \mathbf{h}(i+1) + \mathbf{E}'(i+1)\mathbf{Q}_v^{-1}(i+1)\mathbf{t}(i+1).$$

4.6. Глобальная фильтрация Калмана

Процесс фильтрации Калмана на интервале k -й суточной серии РСДБ-наблюдений заканчивается, когда получена оценка фазового вектора $\hat{\mathbf{z}}(n_k) = \hat{\mathbf{z}}(k)$ для последнего совместного наблюдения в момент $t_{n_k} = t_k$, к которому, кстати, она и относится. Используя для этой оценки выражение (31) при $t_{i+1} = t_k$, получим

$$\hat{\mathbf{z}}(k) = \mathbf{D}(k)[\mathbf{D}_*^{-1}(k)\hat{\mathbf{z}}_*(k) + \mathbf{C}'(k)\mathbf{Q}^{-1}(k)\mathbf{l}(k)].$$

Обозначая член, стоящий в квадратных скобках правой части этого равенства, через \mathbf{h}_k , а также $\mathbf{z}(k) = \mathbf{z}_k$, $\mathbf{D}(k) = \mathbf{P}_k^{-1}$, имеем

$$\mathbf{P}_k\hat{\mathbf{z}}_k = \mathbf{h}_k.$$

Поскольку мы обрабатываем совместно несколько серий наблюдений $k = 1, 2, \dots, M$, а вектор $\hat{\mathbf{z}}_k$ может содержать параметры, общие для всех серий, то представим его в обычном составном виде $\hat{\mathbf{z}}_k = (\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}_k)$. Поделив соответствующим образом симметричную матрицу \mathbf{P}_k на блоки, а вектор \mathbf{h}_k на его составляющие, получим вместо последнего равенства двухгрупповое матричное уравнение

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F}_k & \mathbf{H}_k \\ \mathbf{H}'_k & \mathbf{G}_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_k \\ \mathbf{g}_k \end{bmatrix}. \quad (54)$$

Введем теперь составные векторы $\mathbf{y} = (\mathbf{y}_k)$, $\mathbf{g} = (\mathbf{g}_k)$ и блочные матрицы $\mathbf{G} = \text{diag}(\mathbf{G}_k)$, $\mathbf{H} = [\mathbf{H}_k]$, тогда уравнения (54) можно объединить в общую систему

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F} & \mathbf{H} \\ \mathbf{H}' & \mathbf{G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{g} \end{bmatrix}, \quad (55)$$

где

$$\mathbf{F} = \sum_{k=1}^M \mathbf{F}_k, \quad \mathbf{f} = \sum_{k=1}^M \mathbf{f}_k.$$

Точное решение этой системы дается формулами (8)–(9). Если параметры векторов \mathbf{z}_k должны удовлетворять жестким условиям, то их следует до этого решения ввести по правилу Лагранжа в нормальную систему (55) (см. раздел 3.3).

5. Средняя квадратическая коллокация

5.1. Односерийное уравнивание

На основе обобщенного принципа наименьших квадратов

$$(\mathbf{r}'_k \mathbf{Q}_k^{-1} \mathbf{r}_k) + (\mathbf{s}'_k \mathbf{K}_k^{-1} \mathbf{s}_k) = \min.$$

решение системы матричных уравнений (4) по данным только одной k -й серии наблюдений имеет следующий вид [2, с. 185]:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{z}}_k &= \mathbf{P}_k^{-1} \mathbf{R}'_k \mathbf{S}_k^{-1} \mathbf{l}_k, \\ \hat{\mathbf{s}}_k &= \mathbf{K}_k \mathbf{C}'_k \mathbf{S}_k^{-1} (\mathbf{l}_k - \mathbf{R}_k \hat{\mathbf{z}}_k), \end{aligned} \quad (56)$$

где $\mathbf{z}_k = (\mathbf{x}, \mathbf{y}_k)$ — составной вектор параметров, $\mathbf{R}_k = [\mathbf{A}_k \ \mathbf{B}_k]$ — блочная матрица-строка, $\mathbf{P}_k = \mathbf{R}'_k \mathbf{S}_k^{-1} \mathbf{R}_k$, а

$$\mathbf{S}_k = \mathbf{Q}_k + \mathbf{C}_k \mathbf{K}_k \mathbf{C}'_k \quad (57)$$

представляет собой симметричную матрицу суммарных ковариаций всех стохастических компонент модели (4).

Ковариации этих оценок имеют вид [2, с. 186]:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_{zz,k} &= \mathbf{P}_k^{-1} = (\mathbf{R}'_k \mathbf{S}_k^{-1} \mathbf{R}_k)^{-1}, \\ \mathbf{D}_{ss,k} &= \mathbf{K}_k - \mathbf{K}_k \mathbf{C}'_k \mathbf{S}_k^{-1} [\mathbf{S}_k - \mathbf{R}_k \mathbf{D}_{zz,k} \mathbf{R}'_k] \mathbf{S}_k^{-1} \mathbf{C}_k \mathbf{K}_k, \\ \mathbf{D}_{zs,k} &= -\mathbf{D}_{zz,k} \mathbf{R}'_k \mathbf{S}_k^{-1} \mathbf{C}_k \mathbf{K}_k. \end{aligned} \quad (58)$$

В настоящее время в пакете QUASAR априорные ковариации сигналов для метода СКК вычисляются по той же формуле (46), что и для метода ОФК:

$$K_s(\tau) = \sigma^2 \sum_{n=1}^m b_n e^{-\alpha_n |\tau|} (\cos \beta_n \tau + \frac{\alpha_n}{\beta_n} \sin \beta_n |\tau|), \quad (59)$$

поскольку она описывает довольно широкий класс стационарных процессов, которые удовлетворяют стохастическому дифференциальному уравнению 2-го порядка

$$\frac{d^2}{dt^2} s(t) + 2\alpha \frac{d}{dt} s(t) + (\alpha^2 + \beta^2) s(t) = 2\sigma \sqrt{\alpha(\alpha^2 + \beta^2)} \xi(t),$$

где $\xi(t)$ — белый шум с ковариацией вида δ -функции $K_\xi(\tau) = \delta(\tau)$ и спектральной плотностью $P_\xi(\omega) = 1/2\pi$. Функция (59) положительно определена, так как ее спектральная плотность

$$P_s(\omega) = \frac{2\sigma^2}{\pi} \sum_{n=1}^m \frac{\alpha_n(\alpha_n^2 + \beta_n^2)}{(\omega^2 - \alpha_n^2 - \beta_n^2)^2 + 4\alpha_n^2\omega^2}$$

всегда положительна при $\alpha_n > 0$.

Если параметры \mathbf{z}_k связаны условиями, то первое из уравнений (56) необходимо представить в неразрешенном виде

$$\mathbf{P}_k \mathbf{z}_k = \mathbf{h}_k \quad (60)$$

и, как описано в разделе 3.3, добавить к нему условные уравнения $\mathbf{E}_k \mathbf{z}_k = \mathbf{t}_k$ по правилу Лагранжа:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P}_k & \mathbf{E}'_k \\ \mathbf{E}_k & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{z}}_k \\ \hat{\mathbf{q}}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_k \\ \mathbf{t}_k \end{bmatrix}, \quad (61)$$

где $\mathbf{h}_k = \mathbf{R}'_k \mathbf{S}_k^{-1} \mathbf{t}_k$. Окончательную оценку \mathbf{z}_k получаем из решения системы (61). Поскольку при этом меняются и апостериорные ковариации параметров $\mathbf{D}_{z z, k}$, то оценки сигналов и их ковариации тоже должны быть пересчитаны. Если критерий χ^2 показывает, что дисперсии невязок модели существенно не согласуются с их априорными значениями, то необходимо прибегнуть к итерационному процессу перевзвешивания данных наблюдений, описанному в разделе 5.3.

Если вектор \mathbf{z}_k не содержит параметров \mathbf{x} , общих для всех серий, то на этом процесс односерийного уравнивания заканчивается.

5.2. Многосерийное уравнивание

Если общие для всех серий параметры \mathbf{x} в модели (4) имеются, то их оценивание возможно только в процессе совместного уравнивания всех серий наблюдений $k = 1, 2, \dots, M$. Если ввести составной вектор невязок модели (4) $\mathbf{r} = (\mathbf{r}_k)$ и матрицу их взаимных ковариаций $\mathbf{Q} = \text{diag}(\mathbf{Q}_k)$, то плотность вероятности их совместного нормального распределения (5) достигнет максимума при условии $S = (\mathbf{r}' \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{r}) = \min.$, которое приводит к нормальной системе уравнений вида

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F} & \mathbf{H} \\ \mathbf{H}' & \mathbf{G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}} \\ \hat{\mathbf{y}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{g} \end{bmatrix}, \quad (62)$$

где $\mathbf{y} = (\mathbf{y}_k)$ ($k = 1, 2, \dots, M$) — составной вектор серийных параметров, и обозначено:

$$\mathbf{F} = \sum_k^M \mathbf{F}_k, \quad \mathbf{G} = \text{diag}(\mathbf{G}_k), \quad \mathbf{H} = [\mathbf{H}_k], \quad \mathbf{f} = \sum_k^M \mathbf{f}_k, \quad \mathbf{g} = (\mathbf{g}_k).$$

Если оцениваемые параметры связаны условиями, то соответствующие уравнения необходимо ввести в (62) подобно (14). После этого по формулам (8)–(9) получаем окончательные оценки и их ковариации:

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{x}} &= \boldsymbol{D}_{xx}(\boldsymbol{f} - \boldsymbol{H}\boldsymbol{G}^{-1}\boldsymbol{g}), \\ \hat{\boldsymbol{y}} &= \boldsymbol{D}_{yy}(\boldsymbol{g} - \boldsymbol{H}'\boldsymbol{F}^{-1}\boldsymbol{f}), \\ \boldsymbol{D}_{xx} &= (\boldsymbol{F} - \boldsymbol{H}\boldsymbol{G}^{-1}\boldsymbol{H}')^{-1}, \\ \boldsymbol{D}_{yy} &= (\boldsymbol{G} - \boldsymbol{H}'\boldsymbol{F}^{-1}\boldsymbol{H})^{-1}, \\ \boldsymbol{D}_{xy} &= -\boldsymbol{D}_{xx}\boldsymbol{H}\boldsymbol{G}^{-1}.\end{aligned}$$

5.3. Перевзвешивание наблюдений в СКК

Задача перевзвешивания наблюдений в режиме СКК решена аналогично тому, как это сделано в методе МНК (см. п. 3.6), хотя и с некоторыми особенностями.

Рассмотрим упрощенную стохастическую модель данных наблюдений $\boldsymbol{l} = \boldsymbol{R}\boldsymbol{z} + \boldsymbol{C}\boldsymbol{s} + \boldsymbol{r}$ с известными а priori матрицами ковариаций сигналов \boldsymbol{K}_0 и ошибок наблюдений \boldsymbol{Q}_0 . СКК-оценки параметров и сигналов имеют вид

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{z}}_0 &= (\boldsymbol{R}'\boldsymbol{S}_0^{-1}\boldsymbol{R})^{-1}\boldsymbol{R}'\boldsymbol{S}_0^{-1}\boldsymbol{l}, \\ \hat{\boldsymbol{s}}_0 &= \boldsymbol{K}_0\boldsymbol{C}'\boldsymbol{S}_0^{-1}(\boldsymbol{l} - \boldsymbol{R}\hat{\boldsymbol{z}}_0)\end{aligned}\tag{63}$$

с ковариациями

$$\begin{aligned}\boldsymbol{D}_{zz,0} &= (\boldsymbol{R}'\boldsymbol{S}_0^{-1}\boldsymbol{R})^{-1}, \\ \boldsymbol{D}_{ss,0} &= \boldsymbol{K}_0 - \boldsymbol{K}_0\boldsymbol{C}'\boldsymbol{S}_0^{-1}[\boldsymbol{S}_0 - \boldsymbol{R}\boldsymbol{D}_{zz,0}\boldsymbol{R}']\boldsymbol{S}_0^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{K}_0, \\ \boldsymbol{D}_{zs,0} &= -\boldsymbol{D}_{zz,0}\boldsymbol{R}'\boldsymbol{S}_0^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{K}_0,\end{aligned}\tag{64}$$

где $\boldsymbol{S}_0 = \boldsymbol{Q}_0 + \boldsymbol{C}\boldsymbol{K}_0\boldsymbol{C}'$ – априорная ковариация стохастической части модели данных, равной $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{s} + \boldsymbol{r}$.

Процесс перевзвешивания данных наблюдений состоит из следующих этапов:

1. С помощью полученных оценок сигналов $\hat{\boldsymbol{s}}_0$ вычисляем для данной суточной серии их новые автоковариационные функции с использованием модели (59) или уточняем только их дисперсии. В итоге получаем новую матрицу ковариаций сигналов \boldsymbol{K}_1 и новую матрицу $\boldsymbol{S}_1 = \boldsymbol{Q}_0 + \boldsymbol{C}\boldsymbol{K}_1\boldsymbol{C}'$.

2. По формулам (63) вычисляем новые оценки параметров и сигналов

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{z}}_1 &= (\boldsymbol{R}'\boldsymbol{S}_1^{-1}\boldsymbol{R})^{-1}\boldsymbol{R}'\boldsymbol{S}_1^{-1}\boldsymbol{l}, \\ \hat{\boldsymbol{s}}_1 &= \boldsymbol{K}_1\boldsymbol{C}'\boldsymbol{S}_1^{-1}(\boldsymbol{l} - \boldsymbol{R}\hat{\boldsymbol{z}}_1)\end{aligned}\tag{65}$$

с ковариациями

$$\begin{aligned}\boldsymbol{D}_{zz,1} &= (\boldsymbol{R}'\boldsymbol{S}_1^{-1}\boldsymbol{R})^{-1}, \\ \boldsymbol{D}_{ss,1} &= \boldsymbol{K}_1 - \boldsymbol{K}_1\boldsymbol{C}'\boldsymbol{S}_1^{-1}[\boldsymbol{S}_1 - \boldsymbol{R}\boldsymbol{D}_{zz,1}\boldsymbol{R}']\boldsymbol{S}_1^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{K}_1, \\ \boldsymbol{D}_{zs,1} &= -\boldsymbol{D}_{zz,1}\boldsymbol{R}'\boldsymbol{S}_1^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{K}_1.\end{aligned}\tag{66}$$

3. Вычисляем новую стохастическую компоненту модели $\hat{w}_1 = l - R\hat{z}_1$, а затем и ее дисперсию

$$\hat{\sigma}_w^2 = \frac{\hat{s}_0^2(\hat{w}'_1 S_1^{-1} \hat{w}_1)}{N - m_p + m_c} = \hat{s}_0^2 \chi_w^2,$$

где \hat{s}_0^2 — априорная дисперсия невязок \hat{w}_1 (обычно принимают $\hat{s}_0^2 = 1$), N — число наблюдений в серии, m_p — число постоянных параметров вектора \hat{z}_1 , m_c — количество жестких условий, накладываемых на постоянные параметры.

4. Теперь вычисляем новую матрицу ковариаций невязок \hat{w}_1 :

$$\tilde{S}_1 = \tilde{Q}_0 + C\tilde{K}_1C'$$

где $\tilde{S}_1 = \chi_w^2 S_1$, $\tilde{Q}_0 = \chi_w^2 Q_0$, $\tilde{K}_1 = \chi_w^2 K_1$.

Очевидно, что использование этой матрицы в формулах (65) и (66) изменит оценки параметров и сигналов, но приведет к их новым ковариациям $\tilde{D}_{zz,1} = \chi_w^2 D_{zz,1}$, $\tilde{D}_{ss,1} = \chi_w^2 D_{ss,1}$, $\tilde{D}_{zs,1} = \chi_w^2 D_{zs,1}$ и, кроме того, будем иметь

$$\tilde{\chi}_w^2 = \frac{\hat{w}'_1 \tilde{S}_1^{-1} \hat{w}_1}{N - m_p + m_c} \equiv 1.$$

6. Особенности методов анализа

Выше были рассмотрены три основных типа линейных моделей данных РСДБ-наблюдений — параметрическая, динамическая и стохастическая — и столько же методов их анализа: а) параметрический метод наименьших квадратов (ПМНК), б) групповой метод наименьших квадратов (ГМНК), в) оптимальная фильтрация Калмана (ОФК) и г) средняя квадратическая коллокация (СКК). Все три метода имеют общую основу — принцип максимального правдоподобия, и поэтому могут рассматриваться с общих позиций обобщенного метода наименьших квадратов (ОМНК). Разница между ними не носит принципиального характера и заключается в следующем:

1). ПМНК и ГМНК могут не использовать никакой априорной информации об оцениваемых параметрах за исключением условных уравнений связи между ними, которые чаще всего вытекают из геометрических особенностей задачи. Однако, если модели данных (1) и (2) настолько полны и точны, что оцениваемые параметры можно считать случайными величинами с известными дисперсиями, то эту информацию тоже можно использовать для стохастической регуляризации алгоритма ГМНК, что сближает его с алгоритмами ОФК и СКК.

2). ОФК отличается от ГМНК тем, что вместо постоянных во времени параметров вводит многомерный случайный процесс, который отражает состояние многоканальной стационарной динамической системы первого порядка, непрерывно возмущаемой случайным воздействием в виде многомерного

белого шума. Поскольку РСДБ-наблюдения ведутся дискретно, то наблюдаемый выход такой системы будет представлять собой дискретный многомерный марковский процесс, только в том случае, если интеграл от возмущений по промежутку дискретизации, оставаясь случайной величиной, будет подчиняться нормальному закону распределения, то есть дискретные возмущения будут независимы по вероятности, хотя, возможно, и коррелированными. Такой случайный шум называется тоже белым, но "в узком смысле слова".

Марковские процессы обладают одним уникальным свойством — их состояние в будущем зависит от прошлого только через настоящее. Из этого автоматически следует, что они имеют затухающую экспоненциальную автоковариационную функцию (АКФ), которая однозначно определяет как переходную матрицу динамической системы, так и автоковариацию дискретных возмущений. Однако, если возмущение динамической системы представляет собой не белый, "цветной" широкополосный шум, то для его описания должна быть введена дополнительная динамическая система.

В наиболее распространенном случае, когда анализируемый процесс представляет собой затухающий осциллятор, возбуждаемый белым шумом и удовлетворяющий стохастическому дифференциальному уравнению 2-го порядка, его необходимо представить в виде двумерного процесса вместе со своей первой производной. Если начальные условия обеих компонент известны, то такой процесс является марковским. Реализация обоих этих подходов существенно расширяет класс процессов, поддающихся фильтрации Калмана и сближает ее возможности с методом СКК.

3). Метод СКК также вводит вместо неустойчивых компонент параметров стационарные дискретные сигналы, но в отличие от ОФК эти сигналы не обязательно являются марковскими процессами и их АКФ могут иметь произвольный вид с тем, однако, ограничением, что они должны быть положительно определены, то есть их спектр мощности (косинусное преобразование Фурье) должен быть положительным. Этот метод не требует знания начальных значений сигналов и находит их оценки не последовательно, а все сразу. Правда, это накладывает более жесткие требования на ресурсы вычислительной техники из-за необходимости обращения матриц размером $N \times N$, где N — суммарное количество наблюдений в течение одной суточной серии на всех базах.

7. Заключение

В существующей версии пакета QUASAR еще не все из описанных выше методов анализа РСДБ-наблюдений реализованы оптимально и до конца. Кроме того, эти методы не исчерпывают всех имеющихся возможностей таких, например, как информационный фильтр SRIF [10], скользящий фильтр МНК [3] и др., поэтому их перечень, возможно, со временем будет расширен. В ближайшее время Международная служба РСДБ (IVS) планирует существенно увеличить плотность наблюдений по программе CORE (до 6 суточных

серий в неделю) [11], что требует дальнейшей оптимизации и автоматизации процесса вычислений. Необходимо также адаптировать пакет QUASAR к обработке ежедневных наблюдений по программе Intensives и начавшихся наблюдений на отечественном РСДБ-комплексе КВАЗАР.

Авторы выражают искреннюю благодарность Ю. Л. Русинову за разработку программ оценивания параметров АКФ нелинейным МНК и практические вычисления на обширном материале РСДБ-наблюдений по программе NEOS-A, а также за высококвалифицированную помощь при оформлении статьи в редакторе \LaTeX .

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований по проекту 00-02-16690.

Список литературы

- [1] Губанов В. С., Суркис И. Ф. Обработка РСДБ-наблюдений: Программный пакет QUASAR. I. Редукция данных наблюдений. Сообщения ИПА РАН, № 141, 2001.
- [2] Губанов В. С. Обобщенный метод наименьших квадратов. Теория и применение в астрометрии. СПб.: Наука, 1997.
- [3] Губанов В. С. Новые методы обработки наблюдений в астрометрии. Труды ИПА РАН вып. 6, "Астрометрия, геодинамика и небесная механика 2001.
- [4] Суркис И. Ф. Структура файлов "MARK-3 DBH" и системы их декодировки. Сообщения ИПА РАН, № 104, 1997.
- [5] Gipson J. Fixing the Frame in VLBI. <ftp://gemini.gsfc.nasa.gov/pub/misc/jmg/VLBIfram.pdf>
- [6] Петров Л. Ю. Вторичная обработка геодезических РСДБ наблюдений. Оценивание параметров модели. Сообщения ИПА РАН, № 76, 1995.
- [7] Свешников А. А. Прикладные методы теории случайных функций. М: Наука, 1968.
- [8] Дженкинс Г., Ваттс Д. Спектральный анализ и его приложения. М: Мир, 1971.
- [9] Press W. H., Flannery B. P., Teukolsky S. A., Vetterling W. T. Numerical Recipes in FORTRAN. New York: Cambrige Univ. Press, 1992.
- [10] Biermann G. J., Factorization Methods for Discrete Sequential Estimation. Mathematics in Science and Engineering Series, Academic Press. Vol. 128, 1977.
- [11] Thomas C. C., Ma .C., Vandenberg N. R. CORE: Continuous Observations of the Rotation of the Earth. IVS 2000 General Meeting Proceedings, N. R. Vandenberg and K. D. Baver (Eds), Feb. 21-24, 2000, Kötztig, Germany, pp. 141–146.

В. С. Губанов, И. А. Козлова, И. Ф. Суркис
Обработка РСДБ-наблюдений: Программный пакет QUASAR. II. Методы анализа
данных.

Оригинал-макет подготовлен с помощью системы **L^AT_EX**

Подписано к печати 2.04.2002 Формат 60 × 90/16. Офсетная печать. Печ.л. 2.2
Уч.-изд.л. 2.2 Тираж 100 Заказ бесплатно

Отпечатано в типографии ПИЯФ РАН
(188350 Ленинградская обл., г. Гатчина, Орлова роща).

Институт прикладной астрономии РАН, 197110, С.-Петербург, Ждановская ул., 8.