

Российская академия наук
Институт прикладной астрономии

Сообщения ИПА РАН

№ 131

Н. Б. Железнов

**Метод учета взаимных покрытий и затмений
в системе двойного астероида
при решении фотометрических задач**

Санкт-Петербург
1999

Н. Б. Железнов. Метод учета взаимных покрытий и затмений в системе двойного астероида при решении фотометрических задач.

Ключевые слова: Двойной астероид — взаимные явления — эллипсоиды — кривая блеска — фотоцентр.

Для решения фотометрических задач разработан метод учета взаимных покрытий и затмений компонентами двойного астероида путем разбиения поверхности тел на элементарные площадки и суммирования создаваемых ими освещенностей. Компоненты аппроксимируются трехосными эллипсоидами. Получена модельная кривая блеска гипотетического двойного астероида. Осуществлено тестирование данного метода на примере системы Плутон–Харон. Проведено исследование кривой блеска и изменения положения фотоцентра астероида 1994 AW₁.

Н. Б. Железнов. The method of calculations of coverings and occultations in binary asteroid system for solution of photometric problems.

Keywords: Binary asteroid — mutual phenomena — ellipsoids — lightcurve — photocenter.

With aim of solving the photometric problems the method of allowing for mutual eclipses and occultations by components of binary asteroid has been developed by the way of breaking of component surfaces down to facets and summing up illuminations from separate facets. The components are approximated by triaxial ellipsoids. The lightcurve of hypothetical binary asteroid is modeled. This method has been tested with Pluto–Charon system as an example. Research of lightcurve and change of position of photocenter of asteroid 1994 AW₁ was fulfilled.

Сообщения Института прикладной астрономии РАН № 131 – Санкт-Петербург, 1999. – 47 с.

Содержание

1. Введение	4
2. Метод учета взаимных явлений	6
2.1. Системы координат	6
2.2. Параметрические уравнения эллипсоида	9
2.3. Косинусы углов падения и отражения	10
2.4. Уравнение миделя трехосного эллипсоида	12
2.5. Условие покрытия или затмения точки на поверхности одного эллипсоида другим эллипсоидом	14
2.6. Разбиение поверхности эллипсоида на элементарные площадки	16
3. Алгоритм метода учета взаимных покрытий и затмений	17
4. Вычисление звездной величины и фотоцентра двойного астероида	19
4.1. Основные фотометрические величины и законы отражения .	19
4.2. Вычисление фотоцентра	20
4.3. Процедуры вычисления звездной величины и фотоцентра . .	22
5. Моделирование кривых блеска и фотоцентра двойного астероида	24
5.1. Кривая блеска гипотетического астероида	24
5.2. Тестирование метода на примере системы Плутон–Харон . .	27
5.3. Фотометрические кривые двойного астероида типа 1994 AW ₁	29
6. Заключение	34
Список литературы	35
Приложение 1	37
Приложение 2	39

1. Введение

Двойные астероиды (ДА) представляют собой тесные системы, в которых расстояние между компонентами всего лишь в несколько раз превышает их средние размеры. Вследствие этого ДА при наблюдениях с Земли не разделяются на составляющие и видны как точечные объекты. Хотя двойственность астероида 243 Ida была обнаружена с помощью космического аппарата «Галилео» [1], наиболее перспективным методом обнаружения и дальнейшего исследования таких объектов в настоящее время является изучение кривых блеска астероидов. Кривые блеска ДА имеют характерные особенности, которые можно объяснить только происходящими в системе взаимными явлениями (покрытиями и затмениями). Путем исследования световых кривых были сделаны предположения о двойственности астероидов 3671 Dionysus [2], 1991 VH [3], 1994 AW₁ [4], 1996 FG₃ [5].

Взаимные покрытия и затмения наблюдаются только в случае, когда векторы направлений «астероид — Земля» или «астероид — Солнце» лежат в орбитальной плоскости движения компонентов вокруг общего центра инерции или направлены к ней под небольшим углом. Естественно, что такая ситуация случается достаточно редко. В настоящее время для ряда астероидов получены сложные световые кривые, в которых отсутствуют особенности, связанные со взаимными явлениями, но имеющие большое количество различных периодов колебания блеска. Такое количество периодов может быть объяснено явлениями, свойственными ДА, например, такими как обращение компонентов вокруг общего центра инерции, вынужденная прецессия оси вращения главного тела и т.д. Для исследования световых кривых таких объектов (например, 1220 Stocus) может применяться частотный анализ [6].

Другим методом исследования ДА является моделирование их кривых блеска. Основная сложность в решении этой задачи является учет взаимных покрытий и затмений. Даже для ДА с компонентами сферической формы разработка аналитической теории для вычисления звездной величины астероида сопровождается большими математическими трудностями. Поэтому приходится прибегать к различным упрощениям. Например, в [7] использовались некоторые упрощения в проектировании тени одного компонента на сферическую поверхность другого.

Более перспективный путь для вычисления звездной величины как двойного, так и одиночного астероида открывается при использовании

численного интегрирования. Метод вычисления блеска одиночного астероида с применением численного интегрирования достаточно хорошо разработан. Суть этого метода заключается в разбиении поверхности астероида на элементарные площадки (фасеты) и суммировании их вклада в суммарную освещенность, создаваемую астероидом на Земле. Этот метод в настоящее время широко применяется. Например, в работе [8] Картунне-ном было проведено моделирование кривых блеска трехосного эллипсоида, на поверхности которого имеется сферический кратер, с использованием законов отражения Лумме–Боуэлла и Хапке [9]. Отметим также более раннюю работу [10], в которой сравнивались модельные световые кривые трехосного эллипсоида, полученные при использовании законов отражения Ламберта и Ломмеля–Зеелигера, и [11], в которой моделировались световые кривые свободно прецессирующего сфероидального астероида.

Для моделирования световых кривых ДА в методе численного интегрирования необходимо предусмотреть возможность учета взаимных покрытий и затмений. Другими словами, необходимо определить условия покрытия или затмения каждой фасеты на поверхности одного компонента другим. Для сферических тел эта задача решена и ее применение для моделирования световых кривых ДА можно найти в работах [12] и [4].

Повышение точности позиционных наблюдений малых планет делает весьма актуальной задачу определения фотометрического центра изображения малой планеты (кратной или одиночной). Неучет того факта, что фотометрический центр изображения, получаемый из позиционных наблюдений, из-за наличия фазы не совпадает с ее центром инерции (координаты которого входят в уравнения движения), приводит к ухудшению точности определения орбиты планеты, препятствует определению некоторых дополнительных параметров. Так, точность положений малой планеты 4 Vesta по наблюдениям спутника Hipparcos составляет $0'' 006$ с учетом эффекта фазы и $0'' 015$ без этого учета [13].

В данной работе подробно излагается метод учета покрытий и затмений в системе ДА, разработанный автором на основе метода разбиения поверхности астероида на элементарные площадки. Компоненты аппроксимируются однородными трехосными эллипсоидами. Ориентация тел в пространстве описывается углами Эйлера. Приведены блок-схема и текст процедуры **MCOS** учета покрытий и затмений, написанной на языке программирования **Pascal**. Приведены также несколько вариантов процедуры **SUM**, используемой в **MCOS**, которая вычисляет звездную величину ДА и фотоцентр ДА относительно как барицентра системы, так и центра глав-

ного компонента. При этом, используются законы отражения Ламберта и Ломмеля—Зеелигера.

В качестве примера использования данного метода приведены результаты моделирования кривой блеска с применением закона отражения Ломмеля—Зеелигера для гипотетического ДА и разложение этой кривой на составляющие. Кроме того, для ДА с параметрами, соответствующими параметрам ДА 1994 AW₁ [4], получены некоторые результаты при моделировании световых кривых и движения фотоцентра относительно барицентра системы.

2. Метод учета взаимных явлений

2.1. Системы координат

Пусть $O\xi\eta\zeta$ — планетоцентрическая эклиптическая инерциальная система координат (АСК) с началом в центре масс однородного трехосного эллипсоида. Построим вокруг центра O сферу единичного радиуса и отметим на ней произвольную точку M . Положение точки M определяется долготой L и широтой B .

Будем считать орт \overrightarrow{OM} направлением, совпадающим с координатной осью Z бесселевой системы координат (БСК) [16], где ось X находится в плоскости $O\xi\eta$, параллельной эклиптике, ось Y дополняет систему до правой, а начало системы координат находится в точке O (рис.1).

Заметим, что переход из БСК в АСК осуществляется двумя поворотами вокруг осей координат ζ и X соответственно на углы $L+90^\circ$ и $B-90^\circ$. Таким образом, можно составить матрицу перехода из БСК в АСК:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -\sin L & -\cos L \sin B & \cos L \cos B \\ \cos L & -\sin L \sin B & \sin L \cos B \\ 0 & \cos B & \sin B \end{bmatrix}. \quad (1)$$

Рассмотрим третью систему координат с началом также в точке O . Оси координат этой системы (ξ', η', ζ') совпадают по направлению с главными центральными осями инерции однородного трехосного эллипсоида. Назовем эту систему координат эллипсоидальной (ЭСК). Ориентация осей координат ЭСК относительно АСК определяется углами Эйлера (рис.2).

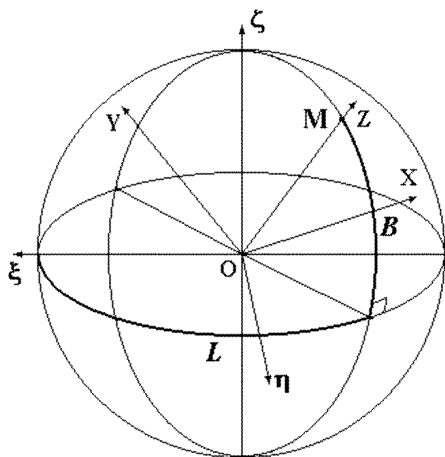


Рис. 1. Эклиптическая (АСК) и бесселева (БСК) системы координат.

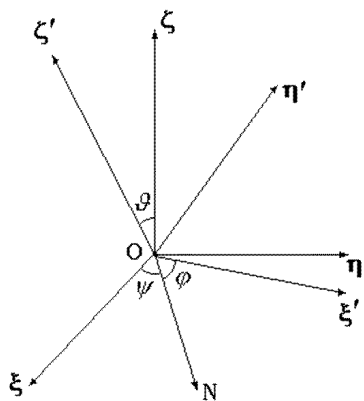


Рис. 2. Эклиптическая (АСК) и эллипсоидальная (ЭСК) системы координат. Углы Эйлера. Вектор OM направлен по линии пересечения плоскостей $O\xi\eta$ и $O\xi'\eta'$.

Используя углы Эйлера, получим матрицу перехода \mathbf{E} из ЭСК в АСК, элементы которой определяются следующими формулами:

$$\begin{aligned}
 e_{11} &= \cos \psi \cos \varphi - \sin \psi \sin \varphi \cos \vartheta, \\
 e_{12} &= -\cos \psi \sin \varphi - \sin \psi \cos \varphi \cos \vartheta, & e_{13} &= \sin \psi \sin \vartheta, \\
 e_{21} &= \sin \psi \cos \varphi + \cos \psi \sin \varphi \cos \vartheta, \\
 e_{22} &= -\sin \psi \sin \varphi + \cos \psi \cos \varphi \cos \vartheta, & e_{23} &= -\cos \psi \sin \vartheta, \\
 e_{31} &= \sin \varphi \sin \vartheta, & e_{32} &= \cos \varphi \sin \vartheta, & e_{33} &= \cos \vartheta.
 \end{aligned} \tag{2}$$

Легко можно получить также матрицу перехода из БСК в ЭСК:

$$\mathbf{A} = \mathbf{E}^{-1} \times \mathbf{B}. \tag{3}$$

Элементы матрицы \mathbf{A} определяются следующими формулами:

$$\begin{aligned}
 a_{11} &= \cos (L + \psi) \sin \varphi \cos \vartheta - \sin (L + \psi) \cos \varphi, \\
 a_{12} &= -\sin (L + \psi) \sin \varphi \cos \vartheta \sin B - \cos (L + \psi) \cos \varphi \sin B + \\
 &\quad + \sin \varphi \sin \vartheta \cos B, \\
 a_{13} &= \sin (L + \psi) \sin \varphi \cos \vartheta \cos B + \cos (L + \psi) \cos \varphi \cos B + \\
 &\quad + \sin \varphi \sin \vartheta \sin B, \\
 a_{21} &= \cos (L + \psi) \cos \varphi \cos \vartheta + \sin (L + \psi) \sin \varphi, \\
 a_{22} &= -\sin (L + \psi) \cos \varphi \cos \vartheta \sin B + \cos (L + \psi) \sin \varphi \sin B + \\
 &\quad + \cos \varphi \sin \vartheta \cos B, \\
 a_{23} &= \sin (L + \psi) \cos \varphi \cos \vartheta \cos B - \cos (L + \psi) \sin \varphi \cos B + \\
 &\quad + \cos \varphi \sin \vartheta \sin B, \\
 a_{31} &= -\cos (L + \psi) \sin \vartheta, \\
 a_{32} &= \sin (L + \psi) \sin \vartheta \sin B + \cos \vartheta \cos B, \\
 a_{33} &= -\sin (L + \psi) \sin \vartheta \cos B + \cos \vartheta \sin B.
 \end{aligned} \tag{4}$$

Если орт \overrightarrow{OM} (рис.1) совпадает с направлением «астероид — Земля» (ОТ), то БСК будем называть «*субтерральной*» (ТСК), а долготу и широту Земли (E) будем обозначать как L_{\oplus} и B_{\oplus} .

Если орт \overrightarrow{OM} совпадает с направлением «астероид — Солнце» (ОС), то БСК будем называть «*субсоларной*» (ССК), а долготу и широту Солнца (S) будем обозначать как L_{\odot} и B_{\odot} .

2.2. Параметрические уравнения эллипсоида

Известные параметрические уравнения эллипсоида

$$\begin{aligned} X' &= a \cos l' \cos \beta', \\ Y' &= b \sin l' \cos \beta', \\ Z' &= c \sin \beta'. \end{aligned} \quad (5)$$

где a, b, c — полуоси эллипсоида, связывают прямоугольные координаты X', Y', Z' произвольной точки на поверхности эллипсоида в ЭСК и сферические координаты l', β' некоторой точки на поверхности сферы, центр которой совпадает с центром эллипсоида, а радиус равен наибольшей полуоси эллипсоида a .

Для того чтобы получить соотношения между прямоугольными координатами и сферическими координатами точки на поверхности эллипсоида в ЭСК, выпишем уравнения преобразования:

$$\begin{aligned} X' &= r \cos l \cos \beta, \\ Y' &= r \sin l \cos \beta, \\ Z' &= r \sin \beta, \end{aligned} \quad (6)$$

где r — расстояние от центра эллипсоида до точки на поверхности с координатами l и β . Очевидно, что

$$r = \sqrt{a^2 \cos^2 l' \cos^2 \beta' + b^2 \sin^2 l' \cos^2 \beta' + c^2 \sin^2 \beta'}. \quad (7)$$

Из уравнений (6) очевидно, что r можно представить как функцию координат l и β . Подставим правые части уравнений (5) в левые части уравнений (6) и получим соотношения между l', β' и l, β :

$$\tan l' = \frac{a}{b} \tan l, \quad (8)$$

$$\tan \beta' = \frac{ab}{c\sqrt{b^2 \cos^2 l + a^2 \sin^2 l}} \tan \beta, \quad (9)$$

В результате получим r как функцию углов l и β :

$$r = \frac{abc}{\sqrt{b^2 c^2 \cos^2 l \cos^2 \beta + a^2 c^2 \sin^2 l \cos^2 \beta + a^2 b^2 \sin^2 \beta}}. \quad (10)$$

Пусть t и f — долгота и полярное расстояние точки на поверхности эллипсоида в БСК. Тогда, зная матрицу перехода из БСК в ЭСК

(3), можно написать формулу для вычисления r , используя сферические координаты в БСК:

$$r = \frac{abc}{R}, \quad (11)$$

где

$$R^2 = K_1 \cos^2 t \sin^2 f + K_2 \sin^2 t \sin^2 f + K_3 \cos^2 f + 2K_4 \sin t \cos t \sin^2 f + 2K_5 \cos t \sin f \cos f + 2K_6 \sin t \sin f \cos f. \quad (12)$$

Коэффициенты K_i ($i = 1, \dots, 6$), которые мы будем называть коэффициентами ориентации эллипсоида в БСК, являются алгебраическими комбинациями полуосей эллипсоида и элементов матрицы \mathbf{A} :

$$\begin{aligned} K_1 &= b^2 c^2 a_{11}^2 + a^2 c^2 a_{21}^2 + a^2 b^2 a_{31}^2, \\ K_2 &= b^2 c^2 a_{12}^2 + a^2 c^2 a_{22}^2 + a^2 b^2 a_{32}^2, \\ K_3 &= b^2 c^2 a_{13}^2 + a^2 c^2 a_{23}^2 + a^2 b^2 a_{33}^2, \\ K_4 &= b^2 c^2 a_{11} a_{12} + a^2 c^2 a_{21} a_{22} + a^2 b^2 a_{31} a_{32}, \\ K_5 &= b^2 c^2 a_{11} a_{13} + a^2 c^2 a_{21} a_{23} + a^2 b^2 a_{31} a_{33}, \\ K_6 &= b^2 c^2 a_{12} a_{13} + a^2 c^2 a_{22} a_{23} + a^2 b^2 a_{32} a_{33}. \end{aligned} \quad (13)$$

Проецируя r на оси координат в БСК, получим необходимые формулы перехода от сферических координат (t, f) к прямоугольным координатам X, Y, Z точки, лежащей на поверхности эллипсоида:

$$\begin{aligned} X &= r \cos t \cos f, \\ Y &= r \sin t \cos f, \\ Z &= r \sin f. \end{aligned} \quad (14)$$

2.3. Косинусы углов падения и отражения

Будем считать, что планета находится достаточно далеко от Солнца и Земли и световые лучи, приходящие к планете от Солнца, параллельны друг другу, также как и световые лучи, приходящие к Земле от планеты.

В этом случае углом падения является угол между нормалью к элементарной площадке на поверхности эллипсоида и направлением на Солнце из центра эллипсоида. Соответственно, углом отражения является угол между нормалью к элементарной площадке и направлением на Землю из центра эллипсоида (рис.3).

Напишем уравнение нормали:

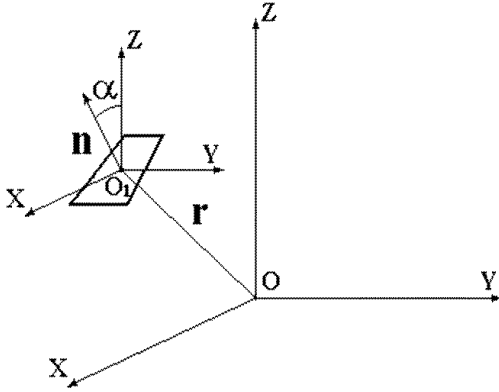


Рис. 3. Угол падения или отражения (α) в БСК ($OXYZ$). \mathbf{n} — нормаль к элементарной площадке, \mathbf{r} — радиус-вектор центра площадки O_1 .

$$\mathbf{n} = \frac{l\mathbf{i} + m\mathbf{j} + n\mathbf{k}}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}, \quad (15)$$

где \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} — орты осей координат ЭСК в БСК, а коэффициенты l, m, n — направляющие косинусы нормали, определяемые следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} l &= \frac{\partial Y}{\partial f} \frac{\partial Z}{\partial t} - \frac{\partial Y}{\partial t} \frac{\partial Z}{\partial f}, \\ m &= \frac{\partial Z}{\partial f} \frac{\partial X}{\partial t} - \frac{\partial Z}{\partial t} \frac{\partial X}{\partial f}, \\ n &= \frac{\partial X}{\partial f} \frac{\partial Y}{\partial t} - \frac{\partial X}{\partial t} \frac{\partial Y}{\partial f}. \end{aligned} \quad (16)$$

Подставляя в формулу (16) выражения для координат эллипсоида (14), получим формулы для коэффициентов l, m, n в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} l \\ m \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_1 & K_4 & K_5 \\ K_4 & K_2 & K_6 \\ K_5 & K_6 & K_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos t \sin f \\ \sin t \sin f \\ \cos f \end{bmatrix}. \quad (17)$$

На самом деле, в правой части (17) должен быть еще множитель $\sin f$. Однако при подстановки l, m, n в (15) он сократится. Следовательно, этот множитель в формуле (17) можно не учитывать.

Так как в БСК ось Z совпадает с направлением на Землю или Солнце, то угол падения или отражения является углом между нормалью к поверхности планеты и осью Z в ССК или ТСК. Следовательно, можно написать общую формулу для вычисления углов падения и отражения в зависимости от используемой системы координат:

$$\cos \alpha = \frac{n}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}} = \frac{K_5 \cos t \sin f + K_6 \sin t \sin f + K_3 \cos f}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}. \quad (18)$$

В ССК вычисляется угол падения ($\alpha = i$), а в ТСК - угол отражения ($\alpha = \varepsilon$).

2.4. Уравнение миделя трехосного эллипсоида

Так как световые лучи, идущие от Солнца к астероиду и от астероида к Земле, считаются параллельными, то тень, отбрасываемая эллипсоидальным телом, имеет форму эллиптического цилиндра. Наибольшее по площади нормальное сечение этого цилиндра называется миделем (рис.4).

Формула в общем виде для вычисления площади миделя эллипсоидального тела в n -мерном пространстве приводится в статье [15]. Однако в нашем случае необходимо знать также уравнения границ миделей для обоих компонентов ДА как по направлению «астероид — Солнце», так и по направлению «астероид — Земля».

Приведем одно из возможных решений этой задачи.

Отметим на поверхности эллипсоида некоторую точку с прямоугольными координатами X, Y, Z в БСК. Найдем тангенсы полярного расстояния и долготы, используя первые два соотношения системы (14):

$$\begin{aligned} X &= r \cos t \sin f, \\ Y &= r \sin t \sin f. \end{aligned} \quad (19)$$

Если тангенс долготы определяется однозначно —

$$\operatorname{tg} t = \frac{X}{Y}, \quad (20)$$

то решение уравнения для тангенса полярного расстояния имеет два корня:

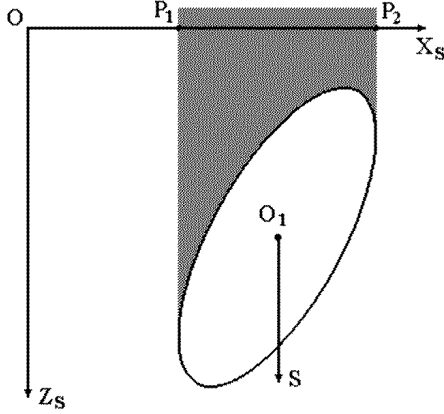


Рис. 4. Проекция тени, отбрасываемой эллипсоидом, на плоскость $OX_S Z_S$ в ССК ($OX_S Y_S Z_S$). Ось Y_S направлена перпендикулярно плоскости рисунка. Вектор $O_1 S$, то-есть направление "астероид — Солнце" параллелен оси Z_S . Отрезок $[P_1 P_2]$ — проекция миделя.

$$\operatorname{tg} f = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \alpha\gamma}}{\alpha}, \quad (21)$$

где

$$\alpha = \frac{K_1 X^2 + K_2 Y^2 + 2K_4 XY - (abc)^2}{X^2 + Y^2}, \quad \beta = \frac{K_5 X + K_6 Y}{\sqrt{X^2 + Y^2}}, \quad \gamma = K_3.$$

Смысл двойного корня заключается в том, что две точки на поверхности эллипсоида в произвольной системе координат могут иметь одинаковые пары прямоугольных координат, в частности в БСК это X и Y . Если же дискриминант равен нулю, то это означает, что система (19) имеет только одно решение, то-есть данные координаты X и Y имеет только одна точка. Так как в БСК ось Z параллельна световому лучу, то единственная точка, определяемая при нулевом дискриминанте, соответствует границе миделя. Следовательно, если в формуле (21) приравняем дискриминант нулю, то получим уравнение границы миделя:

$$(K_1 K_3 - K_5^2) X^2 + (K_2 K_3 - K_6^2) Y^2 + 2XY(K_4 K_3 - K_5 K_6) = K_3 (abc)^2. \quad (22)$$

2.5. Условие покрытия или затмения точки на поверхности одного эллипсоида другим эллипсоидом

Возьмем на поверхности второго эллипсоида точку M со сферическими координатами t_2 и f_2 в ТСК или ССК. Вычислим по формулам (14) прямоугольные координаты этой точки X_2 и Y_2 . Зная координаты центра первого эллипсоида (относительно второго) (X_{01}, Y_{01}) , можно получить координаты данной точки (X_1, Y_1) относительно центра первого эллипсоида:

$$\begin{aligned} X_1 &= X_2 - X_{01}, \\ Y_1 &= Y_2 - Y_{01}. \end{aligned} \quad (23)$$

Будем считать, что первый эллипсоид частично покрывает или затмевает второй эллипсоид. Очевидно, что в случае участия точки M во взаимном явлении, она должна находиться внутри миделя первого эллипсоида (рис.5).

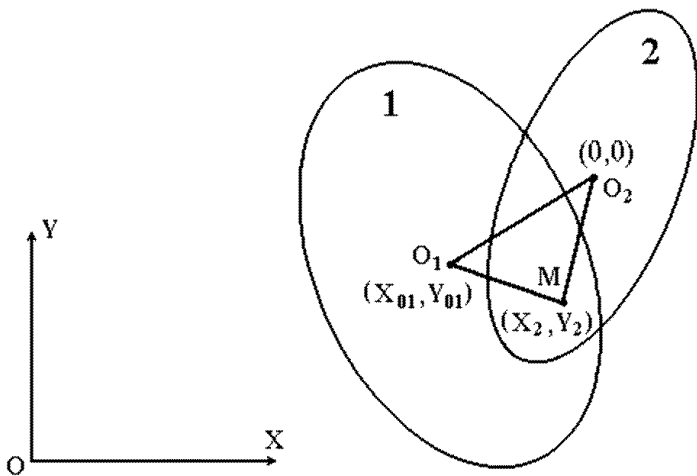


Рис. 5. Покрытие точки M на поверхности второго эллипсоида первым эллипсоидом в БСК. Ось Z направлена перпендикулярно плоскости рисунка.

Следовательно в этом случае должно выполняться следующее неравенство для $v = 1$:

$$\begin{aligned}
(K_{1v}^u K_{3v}^u - (K_{5v}^u)^2) X_v^2 + (K_{2v}^u K_{3v}^u - (K_{6v}^u)^2) Y_v^2 + 2X_v Y_v (K_{4v}^u K_{3v}^u - K_{5v}^u K_{6v}^u) \leq \\
\leq K_{3v}^u (a_v b_v c_v)^2,
\end{aligned} \tag{24}$$

где K_{iv}^u , $(i = 1, \dots, 6)$ — коэффициенты ориентации эллипсоида с индексом v , $(v = 1, 2)$ в ТСК ($u = \oplus$) или ССК ($u = \odot$).

Формулы для определения этих коэффициентов аналогичны формулам (13):

$$\begin{aligned}
K_{1v}^u &= b_v^2 c_v^2 (a_{11}^{uv})^2 + a_v^2 c_v^2 (a_{21}^{uv})^2 + a_v^2 b_v^2 (a_{31}^{uv})^2, \\
K_{2v}^u &= b_v^2 c_v^2 (a_{12}^{uv})^2 + a_v^2 c_v^2 (a_{22}^{uv})^2 + a_v^2 b_v^2 (a_{32}^{uv})^2, \\
K_{3v}^u &= b_v^2 c_v^2 (a_{13}^{uv})^2 + a_v^2 c_v^2 (a_{23}^{uv})^2 + a_v^2 b_v^2 (a_{33}^{uv})^2, \\
K_{4v}^u &= b_v^2 c_v^2 a_{11}^{uv} a_{12}^{uv} + a_v^2 c_v^2 a_{21}^{uv} a_{22}^{uv} + a_v^2 b_v^2 a_{31}^{uv} a_{32}^{uv}, \\
K_{5v}^u &= b_v^2 c_v^2 a_{11}^{uv} a_{13}^{uv} + a_v^2 c_v^2 a_{21}^{uv} a_{23}^{uv} + a_v^2 b_v^2 a_{31}^{uv} a_{33}^{uv}, \\
K_{6v}^u &= b_v^2 c_v^2 a_{12}^{uv} a_{13}^{uv} + a_v^2 c_v^2 a_{22}^{uv} a_{23}^{uv} + a_v^2 b_v^2 a_{32}^{uv} a_{33}^{uv}.
\end{aligned} \tag{25}$$

Здесь a_v , b_v , c_v — большие полуоси эллипсоида с индексом v , а направляющие косинусы a_{ij}^{uv} определяются по формулам, аналогичным формулам (4):

$$\begin{aligned}
a_{11}^{uv} &= \cos(L_u + \psi_v) \sin \varphi_v \cos \vartheta_v + \sin(L_u + \psi_v) \cos \varphi_v, \\
a_{12}^{uv} &= \sin(L_u + \psi_v) \sin \varphi_v \cos \vartheta_v \sin B_u - \\
&\quad - \cos(L_u + \psi_v) \cos \varphi_v \sin B_u + \sin \varphi_v \sin \vartheta_v \cos B_u, \\
a_{13}^{uv} &= -\sin(L_u + \psi_v) \sin \varphi_v \cos \vartheta_v \cos B_u + \\
&\quad + \cos(L_u + \psi_v) \cos \varphi_v \cos B_u + \sin \varphi_v \sin \vartheta_v \sin B_u, \\
a_{21}^{uv} &= \cos(L_u + \psi_v) \cos \varphi_v \cos \vartheta_v - \sin(L_u + \psi_v) \sin \varphi_v, \\
a_{22}^{uv} &= \sin(L_u + \psi_v) \cos \varphi_v \cos \vartheta_v \sin B_u + \\
&\quad + \cos(L_u + \psi_v) \sin \varphi_v \sin B_u + \cos \varphi_v \sin \vartheta_v \cos B_u, \\
a_{23}^{uv} &= -\sin(L_u + \psi_v) \cos \varphi_v \cos \vartheta_v \cos B_u - \\
&\quad - \cos(L_u + \psi_v) \sin \varphi_v \cos B_u + \cos \varphi_v \sin \vartheta_v \sin B_u, \\
a_{31}^{uv} &= -\cos(L_u + \psi_v) \sin \vartheta_v, \\
a_{32}^{uv} &= -\sin(L_u + \psi_v) \sin \vartheta_v \sin B_u + \cos \vartheta_v \cos B_u, \\
a_{33}^{uv} &= \sin(L_u + \psi_v) \sin \vartheta_v \cos B_u + \cos \vartheta_v \sin B_u,
\end{aligned} \tag{26}$$

где φ_v , ψ_v , ϑ_v — углы Эйлера главных центральных осей инерции эллипсоида с индексом v в АСК, а L_u и B_u — сферические координаты точек Земли ($u = \oplus$) и Солнца ($u = \odot$).

Если неравенство (24) не выполняется, то это означает, что данная точка M не участвует во взаимном явлении.

2.6. Разбиение поверхности эллипсоида на элементарные площадки

Пусть имеется некоторая сфера, центр которой совпадает с началом ССК. Построим сферическую систему координат так, чтобы основная плоскость совпадала с плоскостью XOY ССК, а начальный меридиан лежал в плоскости ZOX . Проведем на поверхности сферы через точки с долготами $\frac{\pi}{2M}j$ ($j = 0, 1, 2, \dots, 4M - 1$) систему меридианов, а через точки с полярными расстояниями $\frac{\pi}{2N}i$ ($i = 1, 2, \dots, 2N - 1$) систему параллелей, разбивающих поверхность сферы на элементарные сегменты. Координаты центров (долгота и полярное расстояние) даются следующими формулами:

$$t_j = \frac{\pi}{2M} \left(j + \frac{1}{2} \right), \quad (j = 0, 1, \dots, 4M - 1), \quad (27)$$

$$f_i = \frac{\pi}{2N} \left(i + \frac{1}{2} \right), \quad (i = 0, 1, \dots, 2N - 1). \quad (28)$$

Спроецируем эту систему параллелей и меридианов на поверхность трехосного эллипсоида, ориентированного некоторым образом в ССК. Будем считать расстояние между двумя соседними параллелями и меридианами достаточно малыми, а сегменты плоскими элементарными площадками (фасетами). Тогда можно определить площадь фасеты с индексами i и j на поверхности эллипсоида M_k (S_{ij}^k) по следующей формуле:

$$S_{ij}^k = (r_{ij}^k)^2 \sin(f_i) \sec(\nu) \Delta t \Delta f, \quad (29)$$

где r_{ij}^k — расстояние между центром фасеты и центром эллипсоида, определяемое по формуле (11), ν — угол между нормалью и радиус-вектором центра фасеты, Δt и Δf — угловые расстояния между соседними параллелями и меридианами, зависящие только от M и N :

$$\Delta t = \frac{\pi}{2M}, \quad \Delta f = \frac{\pi}{2N}. \quad (30)$$

Косинус угла между нормалью и радиус-вектором центра фасеты есть скалярное произведение соответствующих векторов и определяется следующей формулой:

$$\cos(\nu) = \mathbf{n} \cdot \mathbf{r} = \frac{l \cos(t) \sin(f) + m \sin(t) \sin(f) + n \cos(f)}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}, \quad (31)$$

Эллипсоид находится внутри многогранника, образованного пересечением плоскостей, причем он касается граней в точках, являющихся

центрами фасет. Площадь такого многогранника больше площади эллипсоида. Но если увеличивать количество разбиений, то естественно ожидать, что площадь многогранника будет приближаться к площади поверхности эллипсоида.

Определим оптимальный порядок значений n и m , исходя из критериев точности вычислений и времени счета. При этом будем считать $n = m$. В таблице 1 представлены результаты сравнения площади поверхности нескольких эллипсоидов с различными соотношениями полуосей, подсчитанные методом суммирования элементарных площадок, с теми значениями, которые дает программа **Maple V Release 5**, работающая в среде Windows.

Таблица 1. Сравнение площади S поверхности трехосного эллипсоида с полуосями $a \times b \times c$, найденной суммированием элементарных площадок при различных n ($n = m$), с результатами счета по программе **Maple V**

$a \times b \times c$	$S(n = 20)$	$S(n = 30)$	$S(n = 150)$	$S(\text{Maple V})$
$10 \times 8 \times 4$	667.4741	667.4455	667.4234	667.4225
$10 \times 7 \times 5$	664.2186	664.1737	664.1393	664.1379
$10 \times 5 \times 2$	373.2881	373.1453	373.1277	373.1275
$7 \times 7 \times 7$	615.9104	615.8225	615.7550	615.7522

Как впоследствии оказалось, увеличение числа разбиений n с 30 до 60 изменяет значение звездной величины астероида на величину, не превышающую 0^m01 . Ошибки измерения звездных величин при наблюдениях с Земли в несколько раз больше. Таким образом, при вычислениях звездной величины астероида точность в 0^m01 достигается при m и n , равных приблизительно 30. При этом время, затраченное на вычисление площади поверхности эллипсоида на *Pentium-120*, чуть меньше двух секунд. В результате было принято, что оптимальное разбиение достигается при $n = m = 30$.

3. Алгоритм метода учета взаимных покрытий и затмений

Астероид — не самосветящееся тело, он светит только отраженным солнечным светом. Так как световой поток мы считаем параллельным,

то очевидно, что у астероида освещена только половина поверхности, обращенная к Солнцу. Таким образом, используя ССК в качестве системы координат, в которой происходит разбиение поверхности эллипсоида на фасеты, мы легко можем добиться того, что при вычислении суммарной освещенности, будем учитывать фасеты только на освещенной стороне. Это достигается следующим образом.

Все центры околополюсных фасет в ССК имеют полярные расстояния с индексом 0. Перебирая по порядку фасеты с одинаковой долготой, прежде всего будем вычислять косинус угла падения для центра фасеты. Этот процесс должен продолжаться до тех пор, пока косинус не станет отрицательным. В этом случае центр фасеты не освещается Солнцем, и, следовательно, вклад данной фасеты в суммарную освещенность будем считать нулевым. Таким образом, при последовательном переходе от одной долготы к другой, повторяя процесс перебора фасет, мы можем покрыть всю освещенную поверхность астероида. Причем для обоих компонентов данный перебор будет вестись одинаковым образом.

Если угол фазы не нулевой, то не вся освещенная Солнцем поверхность астероида будет видна с Земли. Это означает, что среди фасет с углом падения меньше 90° имеются фасеты с углом отражения большим чем 90° . Для того, чтобы выявить эти фасеты, необходимо определить полярные координаты в ТСК центра элементарной площадки и вычислить косинус угла отражения в центре фасеты по формуле (18). Для вычисления полярных координат в ТСК составим матрицу перехода из ССК в ТСК (\mathbf{M}):

$$\mathbf{M} = \mathbf{B}_\oplus^{-1} \times \mathbf{B}_\odot \quad (32)$$

где \mathbf{B}_\oplus — матрица перехода из ТСК в АСК, а \mathbf{B}_\odot — матрица перехода из ССК в АСК.

Определим элементы матрицы \mathbf{M} :

$$\begin{aligned} M_{11} &= \cos(L_\odot - L_\oplus), & M_{12} &= -\sin(L_\odot - L_\oplus) \sin B_\odot, \\ M_{13} &= -\sin(L_\odot - L_\oplus) \cos B_\odot, \\ M_{21} &= \sin(L_\odot - L_\oplus) \sin B_\oplus, \\ M_{22} &= \cos(L_\odot - L_\oplus) \sin B_\odot \sin B_\oplus + \cos B_\odot \cos B_\oplus, \\ M_{23} &= \cos(L_\odot - L_\oplus) \cos B_\odot \sin B_\oplus - \sin B_\odot \cos B_\oplus, \\ M_{31} &= \sin(L_\odot - L_\oplus) \cos B_\oplus, \\ M_{32} &= \cos(L_\odot - L_\oplus) \sin B_\odot \cos B_\oplus - \cos B_\odot \sin B_\oplus, \\ M_{33} &= \cos(L_\odot - L_\oplus) \cos B_\odot \cos B_\oplus + \sin B_\odot \sin B_\oplus. \end{aligned} \quad (33)$$

Таким образом, зная координаты любой точки на поверхности эллипсоида в ССК, мы можем при помощи матрицы (33) определить координаты этой же точки в ТСК. Это дает возможность не только вычислять углы падения и отражения, но и проверять условия покрытия и затмения этой точки другим эллипсоидом.

В результате мы можем описать метод учета покрытий и затмений в системе ДА в целом. Изложим это описание в форме алгоритма процедуры **MCOS** (**Приложение 1**). Номера формул, приведенных в алгоритме, соответствуют номерам в тексте данной статьи. В **Приложении 2** приводится текст процедуры **MCOS** на языке программирования **Pascal**.

4. Вычисление звездной величины и фотоцентра двойного астероида

4.1. Основные фотометрические величины и законы отражения

Астероиды — не самосветящиеся тела. Они видны поскольку рассеивают свет Солнца. Рассмотрим фасету площадью S (км²) на поверхности астероида, находящегося на расстоянии r астрономических единиц (а.е.) от Солнца и Δ от Земли. Освещенность, создаваемая фасетой на Земле, определяется следующей формулой [16, 17]:

$$E = \frac{AI_{\odot}S10^{10} \cos i \cos \varepsilon}{\pi 10^4 r^2 \Delta^2 (1.496 \cdot 10^{11})^4}. \quad (33)$$

где I_{\odot} — сила света Солнца в *канделах*, i и ε — косинусы углов падения и отражения, A — альбедо.

Чтобы перейти от освещенности к звездным величинам, воспользуемся законом Погсона:

$$m - m_0 = -2.5 \lg \frac{E}{E_0}. \quad (34)$$

Если в качестве E_0 взять 1 лк, то, как показали измерения, на уровне моря $m_0 = -14.^m 01$ (в системе каталога Циннера [16]). Известно, что $I_{\odot} = 3.07 \cdot 10^{27}$ кандел. Таким образом, подставляя формулу (33) в (34) и выполняя некоторые упрощения, можно получить формулу для видимой звездной величины фасеты в лучах V :

$$m = 15.^m 26 - 2.5 \lg (AS \cos i \cos \varepsilon) + 5 \lg (\Delta r). \quad (35)$$

При вычислении звездной величины всего астероида, необходимо суммировать освещенности, создаваемые отдельными фасетами, и полученную суммарную освещенность перевести в шкалу звездных величин. Следовательно, в формуле (35) под первым знаком логарифма должна стоять сумма освещенностей:

$$m = 15^m \cdot 26 - 2.5 \lg \left(\sum AS \cos i \cos \varepsilon \right) + 5 \lg (\Delta r). \quad (36)$$

Обозначим освещенность, находящуюся под знаком суммы, как элементарную освещенность dE , а площадь фасеты как элемент площади (dS):

$$dE = A \cos i \cos \varepsilon dS. \quad (37)$$

В формуле (37) используется закон отражения Ламберта. Если же свет рассеивается по закону отражения Ломмеля–Зеелигера, то dE выражается следующей формулой [10]:

$$dE = B \frac{\cos i \cos \varepsilon}{\cos i + \cos \varepsilon} dS, \quad (38)$$

где B — нормализующая постоянная.

Другие известные законы отражения (Хапке–Ирвина, Лумме–Боуэлла) имеют следующую структуру:

$$dE = C f(\beta) \frac{\cos i \cos \varepsilon}{\cos i + \cos \varepsilon} dS, \quad (39)$$

где C — нормализующая постоянная, а $f(\beta)$ — функция, зависящая от угла фазы β .

Эти законы являются хорошей аппроксимацией свойств рассеяния поверхностных слоев, достаточно сложных по составу и структуре. Использование этих законов отражения сопряжено с некоторыми трудностями, и в данной работе они не рассматриваются.

4.2. Вычисление фотоцентра

Формулы для вычисления прямоугольных координат фотоцентра ДА (X_p, Y_p, Z_p) получены нами на основе формул для вычисления фотоцентра одиночного астероида, приведенных в статье [8]. Они имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
X_p &= \frac{1}{E} \sum_{k=1}^2 \int_{(S_k)} (X_k + X_k^0) dE_k, \\
Y_p &= \frac{1}{E} \sum_{k=1}^2 \int_{(S_k)} (Y_k + Y_k^0) dE_k, \quad (k = 1, 2) \\
Z_p &= \frac{1}{E} \sum_{k=1}^2 \int_{(S_k)} (Z_k + Z_k^0) dE_k,
\end{aligned} \tag{40}$$

где X_k^0, Y_k^0, Z_k^0 — координаты центров компонентов относительно точки приведения, dE_k — элементарная освещенность, создаваемая элементом поверхности площадью dS_k в окрестности точки с координатами X_k, Y_k, Z_k . Интегрирование идет по видимой с Земли освещенной Солнцем части поверхности компонента (S_k) . E есть интегральная освещенность, создаваемая на Земле двойной системой:

$$E = \sum_{k=1}^2 \int_{(S_k)} dE_k. \tag{41}$$

Для определения dE_k можно воспользоваться одной из формул (36)–(39) в зависимости от используемого закона отражения.

В случае разбиения поверхности астероидов на элементарные площадки, интегрирование в формулах (40) можно заменить на суммирование по фасетам. В этом случае мы можем воспользоваться уже полученными ранее формулами для вычисления площади фасеты и прямоугольных координат точки на поверхности эллипсоида:

$$dS_k = (r_{ij}^k)^2 \sin f_i \sec(\nu_{ij}^k) \Delta t \Delta f, \tag{42}$$

$$\begin{aligned}
X_k &= r_{ij}^k \cos t_j \sin f_i, \\
Y_k &= r_{ij}^k \sin t_j \sin f_i, \\
Z_k &= r_{ij}^k \cos f_i.
\end{aligned} \tag{43}$$

При подстановке (42) и (43) в (40) и (41) и замене интегрирования на суммирование по фасетам формулы для вычисления фотоцентра двойного астероида будут иметь следующий вид:

$$\begin{aligned}
X_p &= \frac{1}{E} \sum_{k=1}^2 \sum_{i,j}^k E_k(t_j, f_i) (r_{ij}^k \cos t_j \sin f_i + X_k^0) (r_{ij}^k)^2 \sin f_i, \\
Y_p &= \frac{1}{E} \sum_{k=1}^2 \sum_{i,j}^k E_k(t_j, f_i) (r_{ij}^k \sin t_j \sin f_i + Y_k^0) (r_{ij}^k)^2 \sin f_i, \\
Z_p &= \frac{1}{E} \sum_{k=1}^2 \sum_{i,j}^k E_k(t_j, f_i) (r_{ij}^k \cos f_i + Z_k^0) (r_{ij}^k)^2 \sin f_i,
\end{aligned} \tag{44}$$

где

$$E = \sum_{k=1}^2 \sum_{i,j}^k E_k(t_j, f_i) (r_{ij}^k)^2 \sin f_i. \tag{45}$$

Символ \sum^k в формулах (44) и (45) означает, что суммирование идет по всем освещенным Солнцем и видимым с Земли элементарным площадкам, на которые разбита поверхность эллипсоида M_k .

4.3. Процедуры вычисления звездной величины и фотоцентра

На основе алгоритма метода учета взаимных покрытий и затмений разработана соответствующая процедура **MCOS** на языке программирования **Pascal**. Текст этой процедуры приводится в **Приложении 2**.

В данной процедуре используется процедура **SUM**, в которой происходит вычисление необходимых величин суммированием их значений для каждой учитываемой элементарной площадки. В частности, в данном параграфе рассматриваются процедуры для вычисления звездной величины и фотоцентра ДА при использовании законов отражения Ламберта и Ломмеля–Зеелигера. В этих процедурах используются следующие величины: sq — значение вычисляемой величины для одной элементарной площадки; $SV[NS]$ — массив вычисляемых величин; NS — число вычисляемых величин. Например, для вычисления звездной величины достаточно одной величины, а для вычисления фотоцентра необходим массив из четырех величин (для вычисления трех координат фотоцентра и суммарной освещенности E); $alb[r]$ — альбедо компонентов; $cosi[r]$, $cose[r]$ — косинус угла падения и отражения для площадки с координатами центра t и f для компонента с номером r , $cosn[r]$ — косинус угла между нормалью к фасете и радиусом-вектором центра фасеты.

Тексты процедур для вычисления звездной величины ДА при использовании законов отражения Ламберта и Ломмеля–Зеелигера приводятся в **Приложении 2**.

После обращения к процедуре **MCOS** в головной части программы необходимо вставить строку, в которой осуществляется перевод вычисленной величины в шкалу звездных величин. Эта строка имеет следующий вид:

$$SV(1) := -2.5 * \ln(SV(1)/\text{sqr}(rad[1] * rad[2])) / \ln(10) + 15.26;$$

Здесь $rad[1]$ и $rad[2]$ гелио- и геоцентрические расстояния астероида в астрономических единицах. Эти величины необходимо вычислить или определить иным способом в головной части программы.

Для вычисления фотоцентра ДА будем использовать дополнительные величины: $rv[r]$ — расстояние от центра эллипсоида до центра фасеты с координатами t и f для обоих компонентов; $c[u,l]$ — направляющие косинусы нормали к фасете в ССК ($u = 1$) и ТСК ($u = 2$) ($l = 1, 2, 3$); $xb[r]$, $yb[r]$ и $zb[r]$ — эллиптические координаты точки приведения, относительно которой вычисляются координаты фотоцентра. Последние величины определяются в головной части программы, а остальные — в процедуре **MCOS**.

Тексты процедур для вычисления фотоцентра ДА при использовании законов отражения Ламберта и Ломмеля–Зеелигера также приводятся в **Приложении 2**.

Для того чтобы получить координаты фотоцентра ДА (xf, yf, zf), после обращения к процедуре **MCOS** в головной части программы необходимо вставить следующий блок:

$$xf := SV[1]/SV[4]; \quad yf := SV[2]/SV[4]; \quad zf := SV[3]/SV[4];$$

Перед обращением к процедуре **MCOS** необходимо также вычислить или определить иным способом прямоугольные эллиптические координаты спутника ДА относительно главного компонента (xs, ys, zs).

Все перечисленные выше переменные должны быть описаны в начале программы следующим образом:

var

a, c :array[1..2,1..3] of real;

me :array[1..3,1..3] of real;

SV :array[1..NS] of real;

$rv1, rv, cosi, cose, cosn, xb, yb, zb, alb, rad$:array[1..2] of real;

sq, t, f, xf, yf, zf :real;

Здесь NS должно иметь конкретное числовое значение, задаваемое пользователем.

Пользователь может разработать собственную процедуру **SUM** в зависимости от решаемой им задачи. Если в этом случае будут использоваться константы или переменные, не учтенные в этом параграфе, то они должны быть описаны в процедуре **SUM** или в головной программе аналогичным образом.

5. Моделирование кривых блеска и фотоцентра двойного астероида

5.1. Кривая блеска гипотетического астероида

Для тестирования программы, вычисляющей световые кривые, в качестве объекта исследования был выбран гипотетический ДА.

Данный ДА обладает следующими особенностями. Периоды вращения компонентов и их обращения вокруг общего центра инерции несоизмеримы друг с другом. В этом случае кривая блеска будет иметь колебания с различными периодами. Плоскость орбитального движения компонентов вокруг общего центра инерции совпадает с плоскостью эклиптики. Такое движение тел способствует появлению на световых кривых эффектов, связанных со взаимными явлениями (покрытиями и затмениями). Компоненты аппроксимируются сильно вытянутыми трехосными эллипсоидами, ориентация и вращение которых заданы произвольным образом. Центр инерции системы движется в главном поясе астероидов.

Для получения значений прямоугольных координат и углов Эйлера, описывающих положение и ориентацию компонентов в пространстве в каждый момент времени, использовалась программа численного интегрирования поступательно-вращательного движения ДА, разработанная автором [20]. В этой статье приведены результаты интегрирования данного ДА на интервале в 6 суток (≈ 5 оборотов спутника) с шагом в 0.006 дня. Значения прямоугольных координат и углов Эйлера в первые 1.2 дня использовались для моделирования световой кривой.

Приведем значения параметров, описывающих данную двойную систему, которые применялись в качестве начальных данных для программ

численного интегрирования поступательно-вращательного движения и моделирования световых кривых. Начальные значения векторов состояния компонентов вычислялись из эклиптических элементов гелиоцентрической орбиты главного компонента и эклиптических элементов орбиты спутника вокруг главного компонента. Эти элементы имеют следующие значения:

$$a_1 = 2.401 a.e., \quad e_1 = 0.2402, \quad a_2 = 300 \text{ км.}, \quad e_2 = 0.3000,$$

где a_i — большая полуось орбиты компонента M_i , а e_i — эксцентриситет орбиты. Остальные элементы орбит были положены равными нулю. Данные элементы приведены на эпоху JD 2451545.5, которая была взята в качестве начального момента интегрирования.

Размеры компонентов данного ДА имеют следующие значения (в км.): $150 \times 110 \times 70$ для главного компонента и $100 \times 70 \times 40$ для спутника. Плотность вещества компонентов была принята равной 3 г/см^3 . Углы Эйлера ориентации компонентов в пространстве заданы в градусах, а первые производные — в градусах в сутки:

$$\begin{aligned} \varphi_1 = 20, & \quad \psi_1 = 30, & \quad \vartheta_1 = 3, & \quad \dot{\varphi}_1 = 784.0, & \quad \dot{\psi}_1 = -9.74, & \quad \dot{\vartheta}_1 = 0.0, \\ \varphi_2 = 50, & \quad \psi_2 = 10, & \quad \vartheta_2 = 28, & \quad \dot{\varphi}_2 = 1920.0, & \quad \dot{\psi}_2 = -9.19, & \quad \dot{\vartheta}_2 = 0.0. \end{aligned}$$

Необходимо отметить, что производные углов Эйлера используются только в задаче численного интегрирования поступательно-вращательного движения ДА. Для фотометрических задач необходимо задавать также альbedo. В данном случае для главного компонента альbedo принято равным 0.2, а для спутника — 0.1.

Так как кривые блеска или движение фотоцентра моделируются для наблюдателя, находящегося на Земле, то на каждый момент времени необходимо также вычислять эклиптические координаты Земли. Для вычисления долготы, широты и гелиоцентрического расстояния Земли автором использовались тригонометрические ряды, полученные по теории Бретаньона VSOP87 [19].

На рис.6 приведены результаты моделирования кривой блеска данного ДА. Кривая большей толщины представляет блеск с учетом эффектов покрытий и затмений. Тонкая кривая представляет значения блеска без учета этих явлений. В обоих случаях при построении кривой блеска применялся закон отражения Ломмеля–Зеелигера.

Очевидно, что тонкая кривая образуется суперпозицией колебаний блеска, происходящих из-за вращения двух компонентов. Чтобы проиллюстрировать этот процесс, на рис.7 приведены суммарная кривая блеска

(жирная кривая), кривые блеска главного компонента (средней толщины) и спутника (тонкая кривая). Причем кривая спутника на графике сдвинута вверх на 1^m5 .

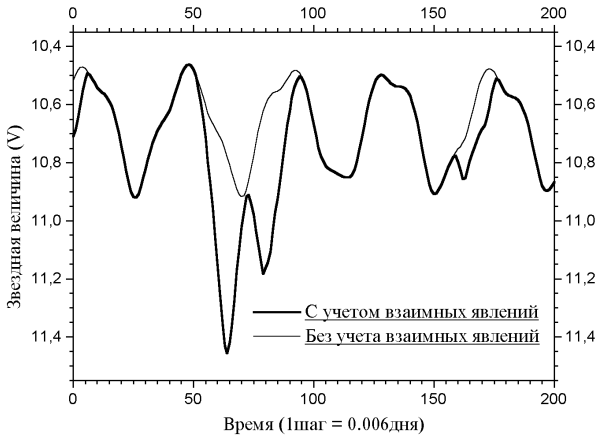


Рис. 6. Кривые блеска ДА с учетом и без учета взаимных явлений

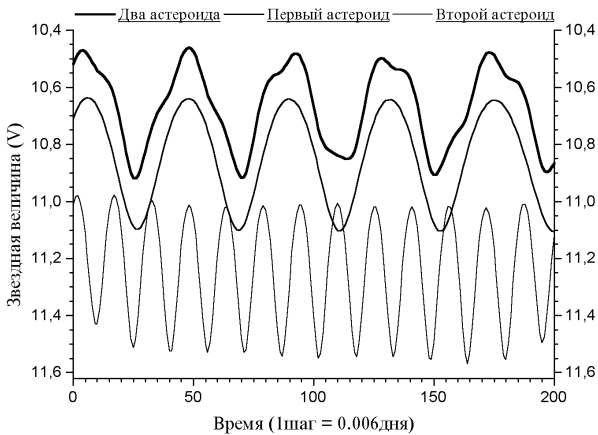


Рис. 7. Кривые блеска ДА без учета взаимных явлений и его компонентов по отдельности. Звездная величина второго астероида уменьшена на 1^m5

Отметим, что на кривой блеска, соответствующей вращению спутника, наблюдаются эффекты, связанные с прецессией оси вращения спутника. Короткий период этой прецессии объясняется тем, что данный гипотетический ДА обладает неустойчивым поступательно-вращательным движением.

5.2. Тестирование метода на примере системы Плутон–Харон

Чтобы убедиться в правильности вычисления описанным выше методом кривой блеска, необходимо протестировать программу на реальном объекте. Лучше всего в качестве эталона взять хорошо известную систему с известными параметрами и с большим рядом фотометрических наблюдений. Таким объектом является двойная планета Плутон–Харон. К особенностям такой системы можно отнести сферичность компонентов и почти круговую орбиту спутника Харона. Таким образом, мы рассмотрим частный случай модельной задачи, в котором отсутствуют колебания блеска, связанные с вращением компонентов.

Для сравнения были взяты кривая блеска системы во время одновременного покрытия и затмения Плутона Хароном [21] и две кривые покрытия Харона Плутоном [22]. Элементы орбиты Харона, радиусы компонентов и их альbedo были взяты из статьи [21].

На рис. 8 и 9 из упомянутых выше статей на реальные кривые блеска наложены кривые, вычисленные при использовании закона отражения Ломмеля–Зеелигера. Альbedo Плутона было принято равным 0.45, что несколько ниже его среднего значения. Как видно на этих рисунках, модельные кривые хорошо аппроксимируют реальные. Однако имеется несовпадение по амплитуде колебаний блеска. У модельных кривых амплитуда колебаний на 0^m01 – 0^m02 больше. Это связано с тем, что амплитуда колебания модельной кривой очень сильно зависит от используемого закона отражения, а закон Ломмеля–Зеелигера не совсем корректно описывает отражение света от поверхностей Плутона и Харона. Поэтому для уменьшения разниц амплитуд колебаний модельных и реальных кривых значение альbedo Плутона было несколько уменьшено. Если использовать закон отражения Ламберта, то амплитуда колебания блеска на рис. 8 увеличится на 0^m11 .

На рис. 8 на световой кривой можно обнаружить особенность во время максимальной фазы одновременного покрытия и затмения Плутона Хароном. Эксперименты с варьированием альbedo компонентов позволили получить аналогичный всплеск яркости системы во время максимальной

фазы явления. Появление этого всплеска можно объяснить одновременным движением тени и части проекции диска спутника по сферической поверхности планеты.

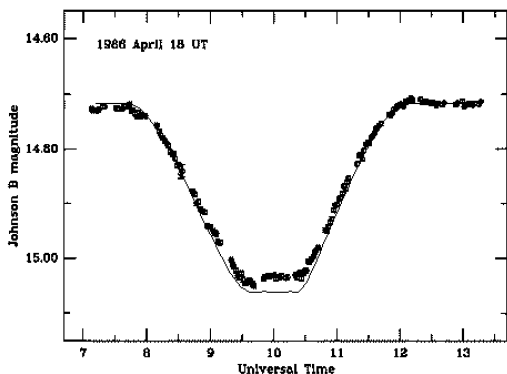


Рис. 8. Сравнение модельной кривой блеска системы Плутон–Харон с реальной, полученной 18 апреля 1988 г. (затмение и частное покрытие Плутона Хароном).

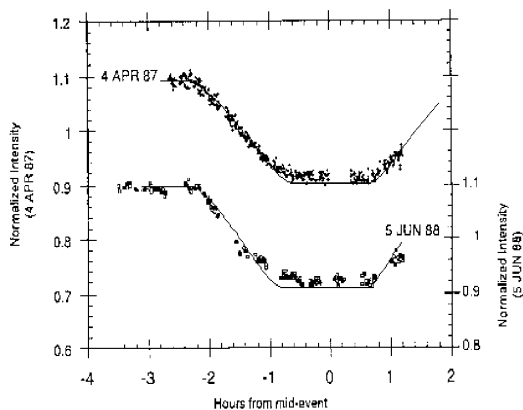


Рис. 9. Сравнение модельных кривых блеска системы Плутон–Харон с реальными, полученными 4 апреля 1987 г. и 5 июня 1988 г. (затмение и покрытие Харона Плутоном).

5.3. Фотометрические кривые двойного астероида типа 1994 AW₁

Характер кривой блеска астероида 1994 AW₁, имеющей два периода колебания, указывает на двойственность данного астероида [4]. Короткий период ($P_2 = 0.104792$ дня) с амплитудой $\sim 0^m.2$ объясняется вращением одного из компонентов, а характер долгопериодической составляющей с периодом $P_1 = 0.4666$ дня и амплитудой $\sim 0^m.3$ объясняется происходящими взаимными покрытиями или затмениями при обращении компонентов двойной системы вокруг общего центра инерции.

В статье [4] приводятся результаты обработки световой кривой, полученной в ходе наблюдений в феврале 1994 г. В предположении двойственности астероида были определены отношение эффективных диаметров компонентов ($d_s:d_p=0.53:1$), эллиптические координаты северного полюса орбиты спутника ($148^\circ, +30^\circ$). Данные координаты были определены на эпоху JD 2449396.5 (13.0 февраля 1994 г.) в предположении, что в это время луч зрения лежит в плоскости орбиты, и наблюдается полное покрытие спутника. Кроме того, были оценены радиус ($r = 1.8d_p-2.7d_p$) и период круговой орбиты спутника ($P = 2P_1$), а также плотность компонентов ($\rho = 1.0-3.5$ г/см³). Диаметр главного компонента (d_p) оценивается в 1–2 км., а альbedo — 0.05–0.2.

Так как в настоящее время невозможно точно определить все параметры двойного астероида 1994 AW₁, будем исследовать объект, параметры которого близко соответствуют данному астероиду. Из данных, приведенных в предыдущем абзаце, можно определить элементы круговой орбиты спутника относительно главного компонента, за исключением положения спутника на орбите. В частности, если $\rho = 1.7$ г/см³, $P = 0.9333$ суток, а $d_p = 1.5$ км, то большая полуось круговой орбиты спутника (a_s) будет равна 3.662 км. Долгота восходящего узла (Ω_s) и наклон орбиты (i_s) определяются координатами северного полюса орбиты.

При моделировании кривой блеска двух сферических тел с данными параметрами оказалось, что ассиметричный профиль кривой взаимного явления лучше соответствует модельной кривой в случае обратного движения спутника, то-есть тогда, когда приведенные выше координаты полюса орбиты спутника соответствуют не северному, а южному полюсу. Таким образом, в этом случае $\Omega_s = 58^\circ$, а $i_s = 120^\circ$. Положение спутника на орбите слабо влияет на амплитуду и период колебания данного объекта. Поэтому средней аномалии (M_{0s}) и долготе перицентра (π_s), используемых в совокупности с другими элементами орбиты для описания кругового дви-

жения спутника, можно присваивать произвольные значения. Например, будем считать их равными нулю в эпоху JD 2449384.0.

Очевидно, что реальные двойные астероиды должны обладать устойчивым движением. В случае аппроксимации реального ДА модельным, необходимо убедиться в том, что модельный ДА также обладает устойчивым поступательно-вращательным движением. Тогда ориентацию и вектор скорости вращения компонентов можно определить согласно теореме об устойчивости относительного равновесия [20]. Суть этой теоремы заключается в том, что устойчивость положения относительного равновесия спутника на круговой орбите достигается в случае, когда наибольшая ось эллипсоида инерции твердого тела направлена по радиусу-вектору, наименьшая — по нормали к плоскости орбиты и средняя ось — по касательной к орбите. Единственное отступление, которое мы вынуждены сделать, заключается в несинхронизированном вращении компонентов, которое наблюдается в периодах колебания яркости. В статье [4] предполагается, что спутник в отличие от главного компонента имеет практически сферическую форму. Таким образом, главный компонент можно аппроксимировать вытянутым эллипсоидом вращения ($a > b = c$), ориентированным большой полуосью на центр инерции системы. Направление средней и малой полуосей, в связи с равенством $b = c$, формально определим согласно теории об устойчивости относительного равновесия. В таком случае, зная элементы орбиты спутника, можно определить углы прецессии и нутации главного компонента ($\psi_1 = 58^\circ$, $\vartheta_1 = 120^\circ$). Угол собственного вращения (φ_1) будем считать равным нулю в эпоху JD 2449384.0. Первые производные углов Эйлера главного компонента определяются согласно теореме об устойчивости относительного равновесия и периода вращения (P_2): $\dot{\varphi}_1 = 3429.485958^\circ/\text{сут}$, $\dot{\psi}_1 = 0$, $\dot{\vartheta}_1 = 0$.

Спутник будем считать сферическим. Следовательно, его вращение не зависит от поступательного движения. Поэтому углы Эйлера и их первые производные, определяющие ориентацию спутника в пространстве и его вращение, могут быть произвольными.

Для определения значений полуосей эллипсоида, аппроксимирующего главный компонент, воспользуемся программой построения кривой блеска. Варьируя соотношение a/b при известных остальных параметрах, можно получить кривую блеска, у которой амплитуда колебаний, связанных с вращением главного компонента, достигает $0^m.2$. При этом будем стараться, чтобы эффективный диаметр эллипсоида оставался неизменным. В результате, было найдено, что указанная величина амплитуды колебаний блеска получается при $a/b = 1.3$. Таким образом, полуоси главного

эллипсоида имеют следующие значения: $a : b : c = 0.893 : 0.687 : 0.687$ км. Радиус спутника соответственно будет равен 0.388 км.

Определив таким образом все необходимые начальные данные, мы проведем численное интегрирование поступательно-вращательного уравнений движения двойной системы с помощью программы, разработанной автором [18]. Интегрирование велось на интервале в полгода, начиная с эпохи JD 2449384.0. Оказалось, что элементы орбиты спутника относительно главного компонента подвержены лишь незначительным периодическим колебаниям. Вековое изменение значений элементов орбиты полностью отсутствует. В результате можно сделать вывод, что устойчивость поступательно-вращательного движения данной модельной системы может служить дополнительным доводом в пользу двойственности астероида 1994 AW₁.

После того как была выявлена устойчивость движения модельного двойного астероида, появляется смысл проведения фотометрического исследования данного объекта. В частности, интересно построить кривую блеска модельного астероида и сравнить ее с кривой блеска астероида 1994 AW₁, а также проследить движение фотоцентра системы относительно ее барицентра на определенном интервале времени.

На рисунках 10 и 12 приведены результаты моделирования световой кривой на интервале в одни сутки. Начало первой кривой приходится на эпоху JD 2449384.0, начало второй — спустя десять суток. Альbedo поверхности обоих компонентов принято равным 0.1. Как видно на этих кривых, амплитуды колебаний блеска, связанных с вращением главного компонента и взаимными покрытиями тел, приблизительно равны $0^m.2$ и $0^m.3$. Однако есть и отличия модельной кривой от кривой блеска астероида 1994 AW₁. Эти отличия проявляются в несовпадении фаз колебаний модельной и реальной кривых блеска. Это несовпадение связано с тем, что величина M_{0s} и момент времени, когда $\varphi_1 = 0$, были заданы произвольным образом.

На рисунках 11 и 13 показано изменение положения фотоцентра двойной системы относительно ее барицентра в плоскости, перпендикулярной к лучу зрения. Крестиком обозначено начало системы координат, то-есть положение барицентра. Как видно из рисунков, характер движения фотоцентра зависит от нескольких факторов. Во-первых, смещение фотоцентра от барицентра зависит от угла фазы. Чем больше угол фазы, тем больше смещение. Во-вторых, короткопериодические колебания объясняются вращением главного компонента. В-третьих, крупномасштабная составляющая в траектории движения фотоцентра в форме эллипса объясняется

движением спутника вокруг главного компонента. Сжатие эллипса зависит, по-видимому, от аспекта орбиты спутника (от угла между нормалью к орбите и лучом зрения). Очевидно, что 13 февраля 1994 г. в аспект близок к 90° , а сжатие — к 1. Этот факт объясняет форму кривой изменения положения фотоцентра в течении суток начиная с момента 10.5 февраля (рис. 13).

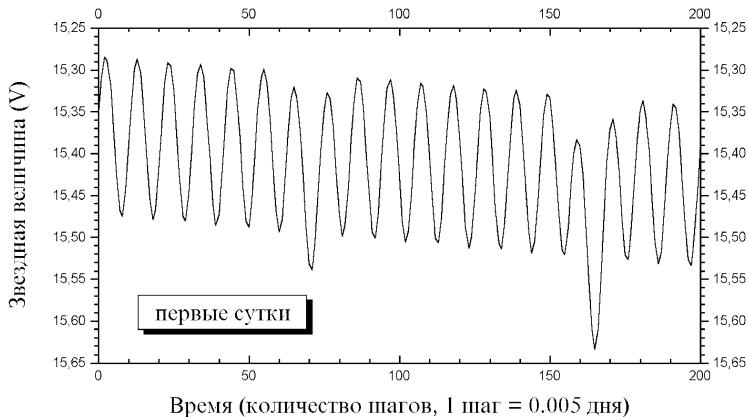


Рис. 10. Кривая блеска двойного астероида типа 1994AW₁ в течение первых суток.

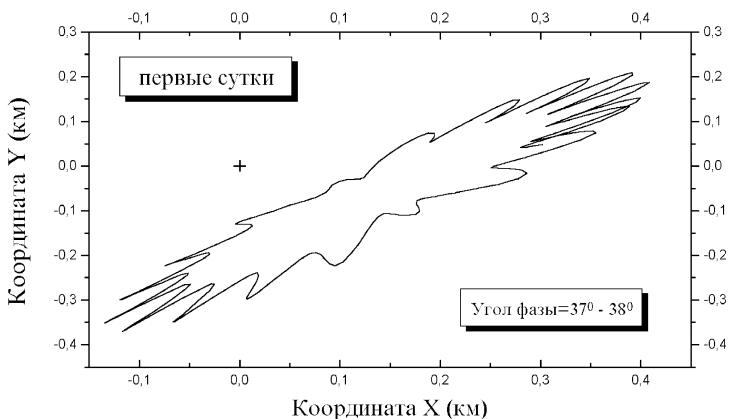


Рис. 11. Движение фотоцентра двойного астероида относительно его барицентра в плоскости, перпендикулярной к лучу зрения наблюдателя, находящегося на Земле, в течение первых суток.

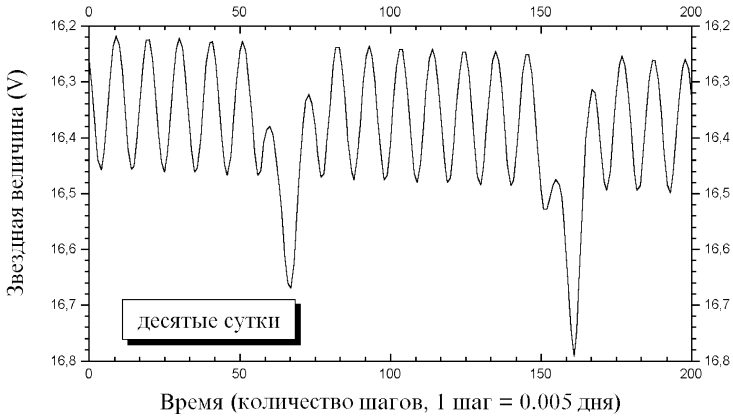


Рис. 12. Кривая блеска двойного астероида типа 1994AW₁ в течение десятых суток.

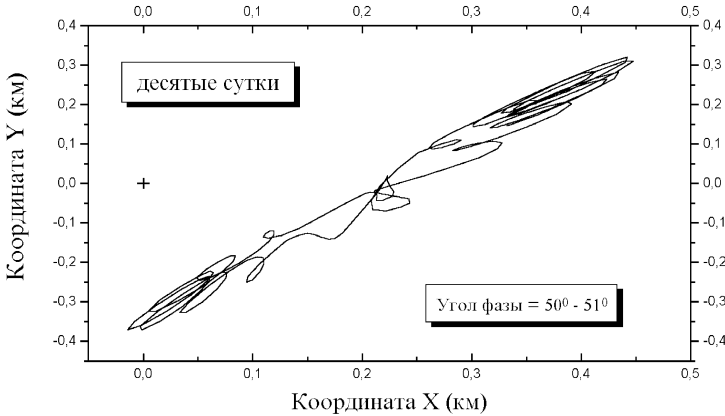


Рис. 13. Движение фотоцентра двойного астероида относительно его барицентра в плоскости, перпендикулярной к лучу зрения наблюдателя, находящегося на Земле, в течение десятых суток.

На рисунке 14 показано изменение углового расстояния между фотоцентром и барицентром системы в проекции на плоскость, перпендикулярной к лучу зрения, в течении первых суток. Как видно на рисунке, кривая имеет достаточно сложный характер, и максимальное расстояние не превышает $0'002$. При наземных наблюдениях ошибка наблюдений на порядок превышает данную величину. Таким образом, можно сделать вы-

вод, что при измерениях положений астероидов сближающихся с Землей подобных 1994 AW₁ смещение фотоцентра относительно центра инерции можно не учитывать.

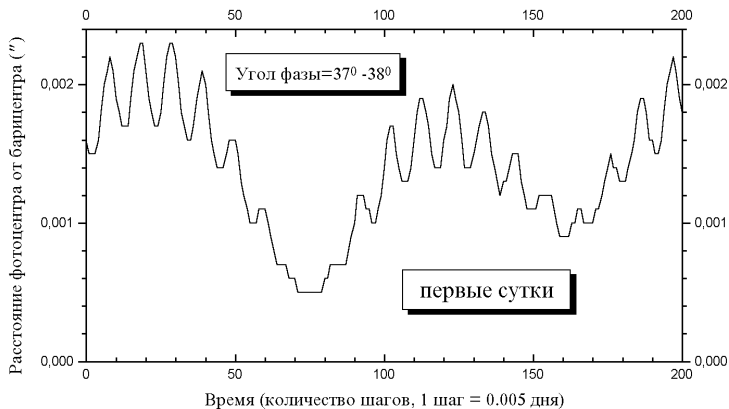


Рис. 14. Смещение фотоцентра двойного астероида относительно его барицентра в плоскости, перпендикулярной к лучу зрения наблюдателя, находящегося на Земле, в течение первых суток.

Если в нашей модельной задаче увеличить размеры тел в системе и их взаимного расстояния в одинаковое количество раз, характер кривых на приведенных в этом параграфе рисунках качественным образом не изменится. Изменения коснутся лишь абсолютных значений звездных величин и координат фотоцентра.

6. Заключение

Данная программа моделирования кривых блеск ДА может быть применена для дальнейшего исследования двойных астероидов. В частности, предполагается провести моделирование кривых блеска двойных астероидов при различных вариантах устойчивого поступательно-вращательного движения. Полученные модельные кривые планируется сравнить с кривыми блеска возможных ДА. Кроме того, возможно проведение частотного анализа модельных кривых с целью определения критериев двойственности астероидов.

Список литературы

- [1] M.J.S. Belton et al. 1996. The discovery and orbit of 1993 (243)1 Dactyl. V.120, 185–199.
- [2] S. Mottola, G. Hahn, P. Pravec, and L. Šarounová. 1997. S/1997 (3671) 1. IAU Circular 6680.
- [3] P. Pravec, M. Wolf, and L. Šarounová. 1998. Occultation/Eclipse Events in Binary Asteroid 1991 VH. Icarus. V.133, N 1, 79–88.
- [4] P. Pravec and G. Hahn. 1997. Two-Period Lightcurve of 1994 AW₁: Indication of a Binary Asteroid? Icarus. V.127, N 2, 431–440.
- [5] Mottola, S., and F. Lahulla. 1998. IAU Circular 7069.
- [6] В.В.Прокофьева, В.П.Таращук, Н.Н.Гарькавый. 1995. Спутники астероидов. Успехи физических наук. Т.165, N 6, 661–689.
- [7] M.P. Wijesinghe and E.F. Tedesco. 1979. A test of Plausibility of Eclipsing Binary Asteroids. Icarus. V.40, N 3, 383–393.
- [8] H. Karttunen. 1989. Modelling asteroid brightness variations. I. Numerical methods. A&A. V.208, N 1/2, 314–319.
- [9] E. Bowell, B. Napke, D. Domingue, K. Lumme, J. Peltoniemi and A. W. Harris. 1989. Application of photometric models to asteroids. Asteroids II. Ed.: R. Binzel, T. Gehrels, M. Matthews. 524–556.
- [10] A. Surdej and J. Surdej. 1978. Asteroid Lightcurves Simulated by the Rotation of a Three-axes Ellipsoid Model. A&A. V.66, N 1/2, 31–36.
- [11] K. Lumme, H. Karttunen, E. Bowell, and M. Poutanen. 1986. Inversion of asteroid lightcurves using spherical harmonics. Asteroids, Comets, Meteors II. Uppsala University. Sweden. 55–59.
- [12] Н.Б. Железнов, В.А. Шор. 1995. Компьютерная программа для вычисления кривых блеска двойных астероидов. Тезисы докладов Всероссийской конференции с международным участием «Астероидная опасность – 95». Т.1. 23–25.
- [13] Batrakov Yu.V., Chernetenko Yu.A., Gorel G.K., Gudkova L.A. 1999. Hipparcos catalogue orientation as obtained from observations of minor planets. A&A. in press.
- [14] А.А.Михайлов. 1954. Теория затмений. Москва. «Наука».
- [15] О.К.Тублина, К.В.Холщевников. 1991. Сечения и мидели эллипсоида. Вестник ЛГУ. Сер.1, вып.4 (N 22), 38–41.

- [16] Мартынов Д.Я., 1967. Курс практической астрофизики. Москва. «Наука».
- [17] Мартынов Д.Я., 1971. Курс общей астрофизики. Москва. «Наука».
- [18] Н.Б.Железнов. 1999. Численное интегрирование уравнений поступательно-вращательного движения двойного астероида. Труды ИПА. вып.4, 273–290.
- [19] J. Meeus. 1991. *Astronomical algorithms*. Willmann-Bell, Inc. USA.
- [20] Белецкий В.В. 1975. Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле. Изд. МГУ.
- [21] Tholen, D.J. and M.W.Buie. 1988. Circumstances for Pluto–Charon mutual events in 1989. *Astron. J.*, 96, N 6, p.1977–1982.
- [22] Young, E.F. and Binzel, R.P. 1994. A new determination of radii and limb parameters for Pluto and Charon from mutual event lightcurves. *Icarus*, 108, N 2, p.219–224.

Приложение 1

Алгоритм процедуры MCOS.

1. Предварительные вычисления.
 - 1.1. Элементы матриц перехода из ССК и ТСК в ЭСК для обоих эллипсоидов (26).
 - 1.2. Коэффициенты K_{lv}^u , ($l = 1, \dots, 6$) ориентации эллипсоидов ($v = 1, 2$) в ССК ($u = 1$) и ТСК ($u = 2$) (25).
 - 1.3. Относительные прямоугольные координаты центров эллипсоидов в ССК и ТСК.
 - 1.4. Элементы матрицы перехода из ССК в ТСК (33).
 - 1.5. Индексу долготы центра фасеты присваивается значение -1 .
2. Значение индекса долготы центра фасеты увеличивается на единицу (до $4M - 1$).
 - 2.1. Вычисляется долгота центра фасеты с индексом j в ССК (27).
 - 2.2. Индексу полярного расстояния центра фасеты присваивается значение -1 .
3. Значение индекса полярного расстояния центра фасеты увеличивается на единицу (до $2N - 1$).
 - 3.1. Вычисляется полярное расстояние центра фасеты с индексом i в ССК (28).
 - 3.2. Вычисляются долгота и полярное расстояние центра фасеты в ТСК.
4. Цикл по индексу $v = 1, 2$.
 - 4.1. Вычисляются косинусы углов падения и отражения (18).
5. Увеличение значения индекса полярного расстояния идет до тех пор, пока косинусы углов падения для обоих эллипсоидов не станут отрицательными. В этом случае переходим к п.2. Если хотя бы один косинус не отрицательный, переходим к процедуре учета взаимных явлений.
6. Цикл по индексу $v = 1, 2$.
 - 6.1. Проверка на принадлежность данной фасеты неосвещенной части: если косинусы углов падения и отражения не отрицательны, то переходим к п.6.2., в противном случае завершаем цикл для данного значения v .

- 6.2. Индексу p присваивается значение по формуле $p = 3 - v$. То-есть, если первый эллипсоид имеет индекс v , то второй эллипсоид имеет индекс p .
- 6.3. Цикл по индексу $u = 1, 2$.
- 6.3.1. Проверка, какой из эллипсоидов ближе к Солнцу ($u = 1$) или к Земле ($u = 2$): если $Z_{0v}^u < Z_{0p}^u$, то переход к п.6.3.2., в противном случае возврат к началу цикла п.6.3.
- 6.3.2. Вычисления прямоугольных координат центра фасеты с индексами i, j, r, u по формулам (11), (12) и (14);
- 6.3.3. Вычисления прямоугольных координат X_1, Y_1 этого же центра относительно центра другого эллипсоида по формуле (23);
- 6.3.4. Проверка условия покрытия или затмения данной фасеты эллипсоидом с индексом p по формуле (24): если неравенство (24) выполняется, то завершение цикла для данного значения v , в противном случае — завершение цикла для данного значения u .
- 6.4. По окончании цикла п.6.3. по индексу u переходим к выполнению процедуры **SUM**. Эта процедура создается пользователем и предназначена для вычисления необходимой для пользователя величины, например, освещенности, создаваемой на Земле. Величина sq — значение этой величины для элементарной площадки, вычисляемое непосредственно в процедуре **SUM**, прибавляется к интегральной сумме SV . В начале основного блока программы величине SV присваивается значение 0. Переменная SV является входным и выходным параметром процедуры **MCOS**, а переменная sq — выходным параметром процедуры **SUM**. Если в вычислениях sq используется площадь фасеты, то можно воспользоваться формулой (29) для вычисления этой площади.
7. По окончании выполнения процедуры **SUM** — завершение цикла для данного значения v (начало цикла — п.6.).
8. По завершении цикла по индексу v — возврат к п.1..
9. По завершении цикла по индексу j — конец работы процедуры **MCOS** и возврат в основной блок программы.

Приложение 2

procedure MCOS;

label 1;

var

i, j, k, r, u, p: **integer**;

cl, sl, cb, sb: **array** [1..2] **of real**;

k2: **array** [1..2,1..2,1..6] **of real**;

ms, mp: **array** [1..3,1..3] **of real**;

ac: **array** [1..2,1..2,1..3,1..3] **of real**;

x0, y0, z0: **array** [1..2,1..2] **of real**;

cfi, sfi, cteta, steta, slpsi, clpsi, dt, df, fi1, fi2, cf1, cf2: **real**;

c12, s12, cla, cma, cna, left, right, x, y, z, x2, y2: **real**;

begin

{ предварительные вычисления, вычисление матриц }

cl[2] := cos(*l*[2]); *sl*[2] := sin(*l*[2]); *cb*[1] := cos(*b*[1]); *sb*[1] := sin(*b*[1]);

cl[1] := cos(*l*[1]); *sl*[1] := sin(*l*[1]); *cb*[2] := cos(*b*[2]); *sb*[2] := sin(*b*[2]);

me[1,1] := -*sl*[2]; *me*[1,2] := *cl*[2]; *me*[1,3] := 0;

me[2,1] := -*cl*[2] * *sb*[2]; *me*[2,2] := -*sl*[2] * *sb*[2]; *me*[2,3] := *cb*[2];

me[3,1] := *cl*[2] * *cb*[2]; *me*[3,2] := *sl*[2] * *cb*[2]; *me*[3,3] := *sb*[2];

ms[1,1] := -*sl*[1]; *ms*[1,2] := -*cl*[1] * *sb*[1]; *ms*[1,3] := *cl*[1] * *cb*[1];

ms[2,1] := *cl*[1]; *ms*[2,2] := -*sl*[1] * *sb*[1]; *ms*[2,3] := *sl*[1] * *cb*[1];

ms[3,1] := 0; *ms*[3,2] := *cb*[1]; *ms*[3,3] := *sb*[1];

c12 := *cl*[1] * *cl*[2] + *sl*[1] * *sl*[2]; *s12* := *sl*[1] * *cl*[2] - *sl*[2] * *cl*[1];

mp[1,1] := *c12*; *mp*[1,2] := -*s12* * *sb*[1]; *mp*[1,3] := *s12* * *cb*[1];

mp[2,1] := *s12* * *sb*[2]; *mp*[2,2] := *c12* * *sb*[1] * *sb*[2] + *cb*[1] * *cb*[2];

mp[3,1] := -*s12* * *cb*[2]; *mp*[2,3] := -*c12* * *cb*[1] * *sb*[2] + *sb*[1] * *cb*[2];

mp[3,2] := -*c12* * *sb*[1] * *cb*[2] + *cb*[1] * *sb*[2];

mp[3,3] := *c12* * *cb*[1] * *cb*[2] + *sb*[1] * *sb*[2];

for *j* := 1 **to** 2 **do begin**

cfi := cos(*fi*[*j*]); *cteta* := cos(*teta*[*j*]);

sfi := sin(*fi*[*j*]); *steta* := sin(*teta*[*j*]);

for *i* := 1 **to** 2 **do begin**

slpsi := sin(*l*[*i*] - *psi*[*j*]); *clpsi* := cos(*l*[*i*] - *psi*[*j*]);

ac[*i, j, 1, 1*] := -*slpsi* * *cfi* + *clpsi* * *sfi* * *cteta*;

ac[*i, j, 1, 2*] := -*clpsi* * *cfi* * *sb*[*i*] - *slpsi* * *sfi* * *cteta* * *sb*[*i*] +
sfi * *steta* * *cb*[*i*];

ac[*i, j, 1, 3*] := *clpsi* * *cfi* * *cb*[*i*] + *slpsi* * *sfi* * *cteta* * *cb*[*i*] +

```

                                                                    sfi * steta * sb[i];
ac[i, j, 2, 1] := slpsi * sfi + clpsi * cfi * cteta;
ac[i, j, 2, 2] := clpsi * sfi * sb[i] - slpsi * cfi * cteta * sb[i] +
                                                                    cfi * steta * cb[i];
ac[i, j, 2, 3] := -clpsi * sfi * cb[i] + slpsi * cfi * cteta * cb[i] +
                                                                    cfi * steta * sb[i];

ac[i, j, 3, 1] := -clpsi * steta;
ac[i, j, 3, 2] := slpsi * steta * sb[i] + cteta * cb[i];
ac[i, j, 3, 3] := -slpsi * steta * cb[i] + cteta * sb[i];
{ вычисление коэффициентов ориентации }
k2[i, j, 1] := sqr (a[j, 2] * a[j, 3] * ac[i, j, 1, 1]) +
                                                                    sqr (a[j, 1] * a[j, 3] * ac[i, j, 2, 1]) + sqr (a[j, 1] * a[j, 2] * ac[i, j, 3, 1]);
k2[i, j, 2] := sqr (a[j, 2] * a[j, 3] * ac[i, j, 1, 2]) +
                                                                    sqr (a[j, 1] * a[j, 3] * ac[i, j, 2, 2]) + sqr (a[j, 1] * a[j, 2] * ac[i, j, 3, 2]);
k2[i, j, 3] := sqr (a[j, 2] * a[j, 3] * ac[i, j, 1, 3]) +
                                                                    sqr (a[j, 1] * a[j, 3] * ac[i, j, 2, 3]) + sqr (a[j, 1] * a[j, 2] * ac[i, j, 3, 3]);
k2[i, j, 4] := sqr (a[j, 2] * a[j, 3]) * ac[i, j, 1, 1] * ac[i, j, 1, 2] +
                                                                    sqr (a[j, 1] * a[j, 3]) * ac[i, j, 2, 1] * ac[i, j, 2, 2] +
                                                                    sqr (a[j, 1] * a[j, 2]) * ac[i, j, 3, 1] * ac[i, j, 3, 2];
k2[i, j, 5] := sqr (a[j, 2] * a[j, 3]) * ac[i, j, 1, 1] * ac[i, j, 1, 3] +
                                                                    sqr (a[j, 1] * a[j, 3]) * ac[i, j, 2, 1] * ac[i, j, 2, 3] +
                                                                    sqr (a[j, 1] * a[j, 2]) * ac[i, j, 3, 1] * ac[i, j, 3, 3];
k2[i, j, 6] := sqr (a[j, 2] * a[j, 3]) * ac[i, j, 1, 2] * ac[i, j, 1, 3] +
                                                                    sqr (a[j, 1] * a[j, 3]) * ac[i, j, 2, 2] * ac[i, j, 2, 3] +
                                                                    sqr (a[j, 1] * a[j, 2]) * ac[i, j, 3, 2] * ac[i, j, 3, 3];

end;
if j = 1 then sign := 1 else sign := -1;
{ вычисление относительных координат компонентов в ССК и ТСК }
x0[1, j] := sign * (xs * ms[1, 1] + ys * ms[2, 1] + zs * ms[3, 1]);
y0[1, j] := sign * (xs * ms[1, 2] + ys * ms[2, 2] + zs * ms[3, 2]);
z0[1, j] := sign * (xs * ms[1, 3] + ys * ms[2, 3] + zs * ms[3, 3]);
x0[2, j] := sign * (xs * me[1, 1] + ys * me[1, 2] + zs * me[1, 3]);
y0[2, j] := sign * (xs * me[2, 1] + ys * me[2, 2] + zs * me[2, 3]);
z0[2, j] := sign * (xs * me[3, 1] + ys * me[3, 2] + zs * me[3, 3]);

end;
dt := pi/2/m; df := pi/2/n;
{ основные вычисления }
for j := 0 to 4 * m - 1 do begin
{ вычисление долготы точки в ССК }

```

```

t := pi/2/m * (j + 0.5);
i := -1;
repeat
  i := i + 1;
{ вычисление полярного расстояния точки в ССК }
  f := pi/2/n * (i + 0.5);
{ вычисление направляющих косинусов точки в ССК и ТСК }
  c[1, 1] := cos(t) * sin(f);
  c[1, 2] := sin(t) * sin(f);
  c[1, 3] := cos(f);
  for k := 1 to 3 do
    c[2, k] := c[1, 1] * mp[k, 1] + c[1, 2] * mp[k, 2] + c[1, 3] * mp[k, 3];
  for k := 1 to 2 do begin
{ вычисление косинусов углов падения и отражения, а также косинуса
угла между нормалью к поверхности и радиусом-вектором данной точки }
  cla := k2[2, k, 1] * c[2, 1] + k2[2, k, 4] * c[2, 2] + k2[2, k, 5] * c[2, 3];
  cma := k2[2, k, 4] * c[2, 1] + k2[2, k, 2] * c[2, 2] + k2[2, k, 6] * c[2, 3];
  cna := k2[2, k, 5] * c[2, 1] + k2[2, k, 6] * c[2, 2] + k2[2, k, 3] * c[2, 3];
  cose[k] := cna/sqrt(cla * cla + cma * cma + cna * cna);
  cla := k2[1, k, 1] * c[1, 1] + k2[1, k, 4] * c[1, 2] + k2[1, k, 5] * c[1, 3];
  cma := k2[1, k, 4] * c[1, 1] + k2[1, k, 2] * c[1, 2] + k2[1, k, 6] * c[1, 3];
  cna := k2[1, k, 5] * c[1, 1] + k2[1, k, 6] * c[1, 2] + k2[1, k, 3] * c[1, 3];
  cosi[k] := cna/sqrt(cla * cla + cma * cma + cna * cna);
  cosn[k] := (cla * c[1, 1] + cma * c[1, 2] + cna * c[1, 3]) * cosi[k]/cna;
{ вычисление расстояния данной точки от центра эллипсоида в ССК и ТСК;
использование разницы вычисленных значений этого расстояния в качестве
проверочного уравнения }
  ElRad(k2[1, k, 1], k2[1, k, 2], k2[1, k, 3], k2[1, k, 4], k2[1, k, 5],
    k2[1, k, 6], a[k, 1] * a[k, 2] * a[k, 3], c[1, 1], c[1, 2], c[1, 3], rv[k]);
  ElRad(k2[2, k, 1], k2[2, k, 2], k2[2, k, 3], k2[2, k, 4], k2[2, k, 5],
    k2[2, k, 6], a[k, 1] * a[k, 2] * a[k, 3], c[2, 1], c[2, 2], c[2, 3], rv1[k]);
  if abs(rv[k] - rv1[k]) >= 0.0000001 then begin
    write('ОШИБКА В ВЫЧИСЛЕНИЯХ РАДИУСА ЭЛЛИПСОИДА');
    halt
  end
end;
{ процедура метода учета взаимных явлений покрытий и затмений }
if ((cosi[1] >= 0) or (cosi[2] >= 0)) then begin

```

```

for  $r := 1$  to 2 do begin
  if  $r = 1$  then  $p := 2$  else  $p := 1$ ;
  if  $((\text{cosi}[r] >= 0)$  and  $(\text{cose}[r] >= 0))$  then begin
    for  $u := 1$  to 2 do
      if  $(z0[u, r] > 0)$  then begin
         $x := c[u, 1] * rv[r]$ ;
         $y := c[u, 2] * rv[r]$ ;
         $z := c[u, 3] * rv[r]$ ;
         $x2 := x - x0[u, r]$ ;
         $y2 := y - y0[u, r]$ ;
        { вычисление правого и левого частей уравнения миделя }
         $left := ((k2[u, p, 1] * k2[u, p, 3] - \text{sqr}(k2[u, p, 5])) * x2 * x2 +$ 
           $(k2[u, p, 2] * k2[u, p, 3] - \text{sqr}(k2[u, p, 6])) * y2 * y2 +$ 
           $2 * x2 * y2 * (k2[u, p, 4] * k2[u, p, 3] - k2[u, p, 5] * k2[u, p, 6]));$ 
         $right := k2[u, p, 3] * \text{sqr}(a[p, 1] * a[p, 2] * a[p, 3]);$ 
        if  $(left < right)$  then
          goto 1;
        end
      end;
    SUM
  end
1: end
end
until  $((\text{cosi}[1] < 0)$  and  $(\text{cosi}[2] < 0))$ 
end
end;

```

```

{ процедура вычисления радиуса эллипсоида в точке с координатами t и f }
procedure ElRad( $k1, k2, k3, k4, k5, k6, abc, cp1, cp2, cp3$ :bf real; var  $rv$ :real);
begin
   $rv := \text{sqrt}(k1 * \text{sqr}(cp1) + k2 * \text{sqr}(cp2) + k3 * cp3 * cp3 + 2 * k4 * cp1 * cp2 +$ 
     $2 * k5 * cp1 * cp3 + 2 * k6 * cp2 * cp3);$ 
   $rv := abc / rv$ 
end;

```

```

{Процедура вычисления звездной величины ДА,}
{использующая закон отражения Ламберта}
procedure SUM;
var sq:real;
begin
  sq := alb[r] * cosi[r] * cose[r];
  SV[1] := SV[1] + sq;
end;

```

```

{Процедура вычисления звездной величины ДА,}
{использующая закон отражения Ломмеля-Зеелигера}
procedure SUM;
var sq:real;
begin
  sq := alb[r] * cosi[r] * cose[r] / (cosi[r] + cose[r]);
  SV[1] := SV[1] + sq;
end;

```

```

{Процедура вычисления координат фотоцентра ДА в ТСК,}
{использующая закон отражения Ламберта}
procedure SUM;
var sq:real;
begin
  sq := (rv[r] * c[2, 1] + xb[r]) * rv[r] * rv[r] * sin (f) / cosn[r] * cosi[r] * cose[r];
  SV[1] := SV[1] + sq;
  sq := (rv[r] * c[2, 2] + yb[r]) * rv[r] * rv[r] * sin (f) / cosn[r] * cosi[r] * cose[r];
  SV[2] := SV[2] + sq;
  sq := (rv[r] * c[2, 3] + zb[r]) * rv[r] * rv[r] * sin (f) * cosi[r] * cose[r];
  SV[3] := SV[3] + sq;
  sq := rv[r] * rv[r] * sin (f) / cosn[r] * cosi[r] * cose[r];
  SV[4] := SV[4] + sq;
end;

```

{Процедура вычисления координат фотоцентра ДА в ТСК,
{использующая закон отражения Ломмеля-Зеелигера}

procedure SUM;

var *sq*:real;

begin

$sq := (rv[r] * c[2, 1] + xb[r]) * rv[r] * rv[r] * \sin(f) / \cos n[r] * \cos i[r] * \cos e[r] /$
 $(\cos i[r] + \cos e[r]);$

$SV[1] := SV[1] + sq;$

$sq := (rv[r] * c[2, 2] + yb[r]) * rv[r] * rv[r] * \sin(f) / \cos n[r] * \cos i[r] * \cos e[r] /$
 $(\cos i[r] + \cos e[r]);$

$SV[2] := SV[2] + sq;$

$sq := (rv[r] * c[2, 3] + zb[r]) * rv[r] * rv[r] * \sin(f) / \cos n[r] * \cos i[r] * \cos e[r] /$
 $(\cos i[r] + \cos e[r]);$

$SV[3] := SV[3] + sq;$

$sq := rv[r] * rv[r] * \sin(f) / \cos n[r] * \cos i[r] * \cos e[r] / (\cos i[r] + \cos e[r]);$

$SV[4] := SV[4] + sq;$

end;

Н. Б. Железнов

Метод учета взаимных покрытий и затмений в системе двойного астероида при решении фотометрических задач.

Оригинал-макет подготовлен с помощью системы **L^AT_EX**

Подписано к печати 10.12.99 Формат 60 × 90/16. Офсетная печать. Печ.л. 3.0
Уч.-изд.л. 3.0 Тираж 110 Заказ бесплатно

Отпечатано в типографии ПИЯФ РАН
(188350 Ленинградская обл., г. Гатчина, Орлова роща).

Институт прикладной астрономии РАН, 197110, С.-Петербург, Ждановская ул., 8.