Небесная механика для школьников

Николай Борисович Железнов, к.ф.-м.н.
(Институт прикладной астрономии РАН)

Темы лекции

1. 1, 2 и 3 космические скорости
2. Законы Кеплера. Кеплерова орбита
3. Гравитационные маневры
4. Гоманова орбита
5. Миссии к планетам
6. Задача N-тел в небесной механики

1-я космическая скорость

$$ma = G\frac{Mm}{R^2},$$

m — масса объекта, *a* — его ускорение, *G* — гравитационная постоянная, *M* — масса планеты, *R* — радиус орбиты.
Подставим центростремительное ускорение

$$m\frac{v_1^2}{R} = G\frac{Mm}{R^2}.$$

$$v_1 = \sqrt{G\frac{M}{R}}.$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{GM}{R_0 + h}}.$$

Для Земли $v_1 \approx 7.9$ км/с

$$T = \frac{2\pi R}{v} = 2\pi R\sqrt{\frac{R}{GM}}.$$

Геостационарная орбита. Период – 24 часа

ИСЗ, находящийся на геостационарной орбите, неподвижен относительно поверхности Земли, поэтому его местоположение на орбите называется *точкой стояния*. В результате сориентированная на спутник и неподвижно закреплённая направленная антенна может сохранять постоянную связь с этим спутником длительное время

Радиус геостационарной орбиты составляет 42164 км.
Высота над поверхностью Земли составляет 35786 км.
Скорость движения по орбите – 3.07 км/с

https://chudo.tech/2017/02/08/gif-dnya-zemlya-s-geostatsionarnoj-orbity/

2-я космическая скорость

Закон сохранение энергии

$$\frac{mv_2^2}{2} - G\frac{mM}{R} = 0,$$

$$v_2 = \sqrt{2G\frac{M}{R}}.$$

$$v_2 = \sqrt{2}v_1.$$

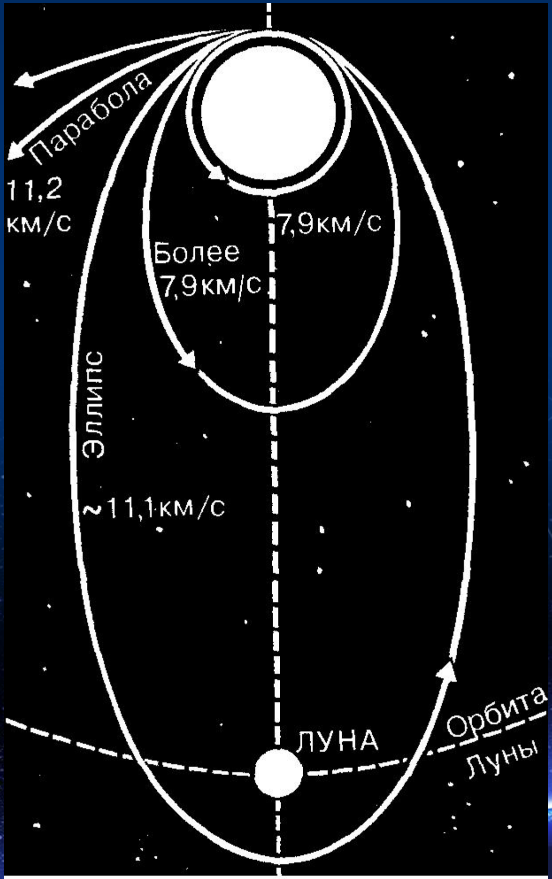
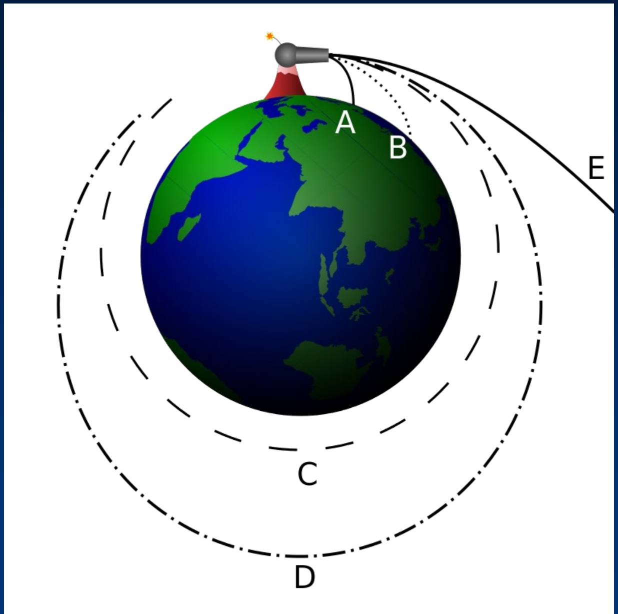


Рис. 109



Снаряды А и В падают на Землю. Снаряд С выходит на круговую орбиту (1-я космическая скорость, D — на эллиптическую. Снаряд Е улетает в открытый космос (2-я космическая скорость).

Для Земли $V_2 \approx 11.2$ км/с

http://school.xvatit.com/images/3/38/F109.jpg

3-я космическая скорость

$$v_3 = \sqrt{(\sqrt{2}-1)^2 v_Z^2 + v_2^2},$$

где v_Z - орбитальная скорость планеты

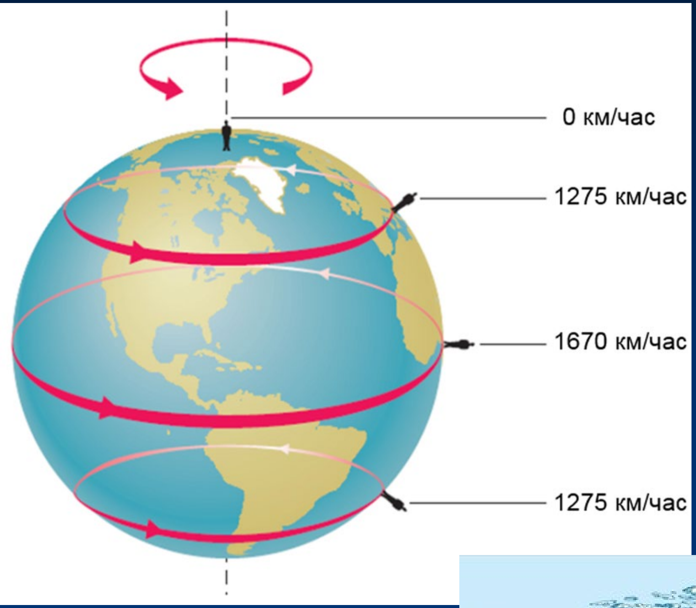
Для Земли ≈ 29,783 км/с, $v_2 \approx 11{,}182$ км/с.

$v_3 \approx 16{,}650$ км/с.

При старте с Земли, наилучшим образом используя осевое вращение (≈0,5 км/с) и орбитальное движение планеты (≈29,8 км/с), космический аппарат может достичь третьей космической скорости уже при ≈ 16,6 км/с относительно Земли. Для достижения третьей космической скорости наиболее энергетически выгодный старт должен осуществляться вблизи экватора, движение объекта должно быть сонаправлено осевому вращению Земли и орбитальному движению Земли вокруг Солнца, то есть запуск следует производить в местную полночь на космодроме. При этом скорость движения аппарата относительно Солнца составит

29,8 + 16,6 + 0,5 = 46,9 км/с.

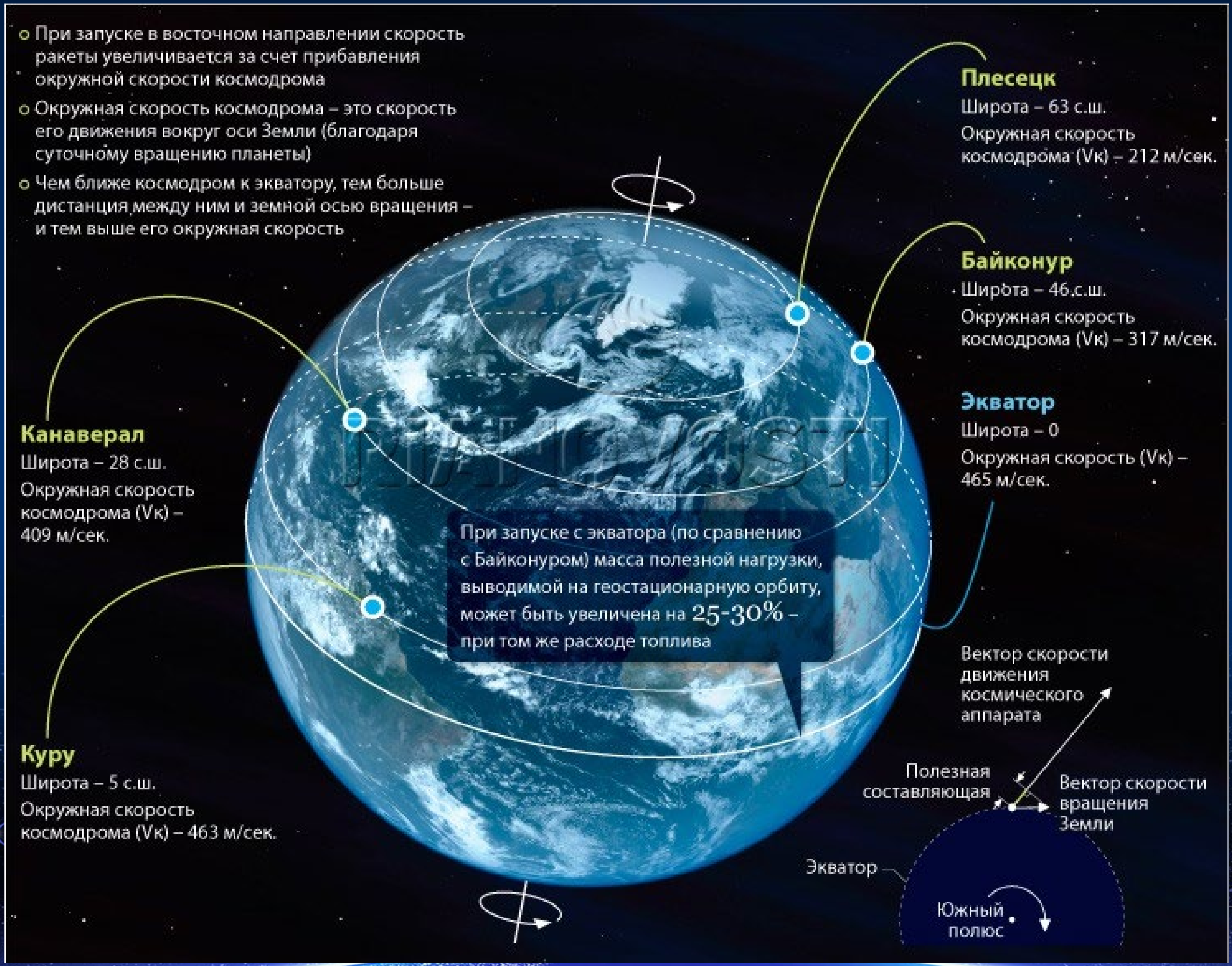
Осевое вращение Земли. Космодромы



https://travelask.ru/system/images/files/000/388/785/wysiwyg/вращение-земли.jpg?1509097754

https://travelask.ru/blog/posts/9247-gde-na-zemle-samoe-udobnoe-mesto-dlya-zapuska-kosmicheskih-r

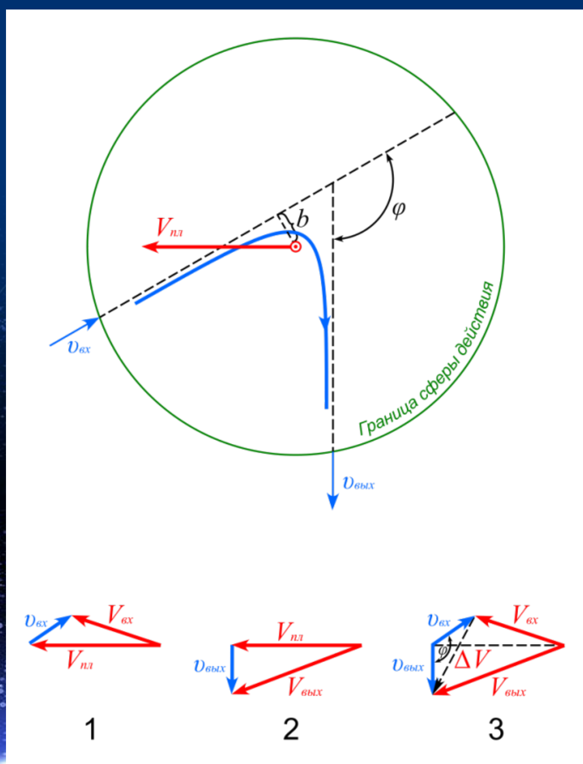
Окружная скорость космодрома



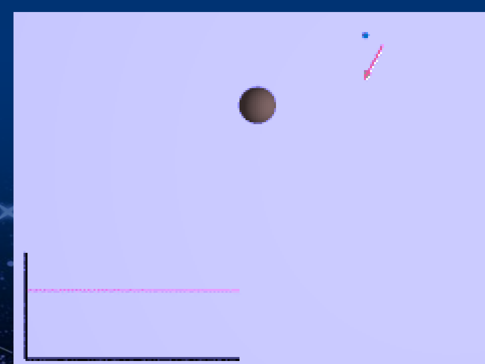
https://content-1.foto.my.mail.ru/list/sanzhar.saev/_answers/h-106.jpg

Гравитационные маневры

На начало 2015 г. ни один космический аппарат не покидал окрестностей Земли с третьей космической скоростью. Наибольшей скоростью покидания Земли обладал КА «Новые горизонты»; его скорость составила 16.26 км/с, что меньше третьей космической на 0.34 км/с. Но за счёт гравитационного манёвра у Юпитера в 2007 году он ещё прибавил 4 км/с, что позволит ему в будущем уверенно покинуть гелиосферу. Аналогичным образом ускорялись и другие КА, уже покинувшие гелиосферу («Вояджер-1», «Вояджер-2», «Пионер-10» и «Пионер-11»). Все они покидали окрестности Земли со скоростями, существенно меньшими третьей космической.



Замедление



Ускорение

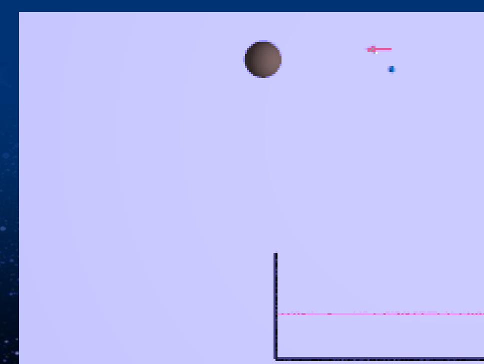
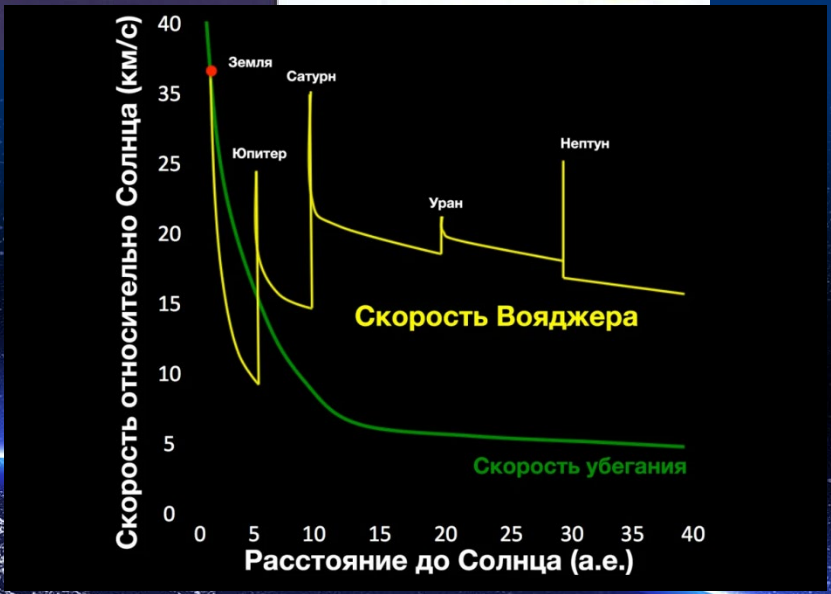


Схема гравитационного манёвра: 1) треугольник скоростей при входе, 2) треугольник скоростей при выходе, 3) ΔV — изменение гелиоцентрической скорости в результате гравитационного манёвра.

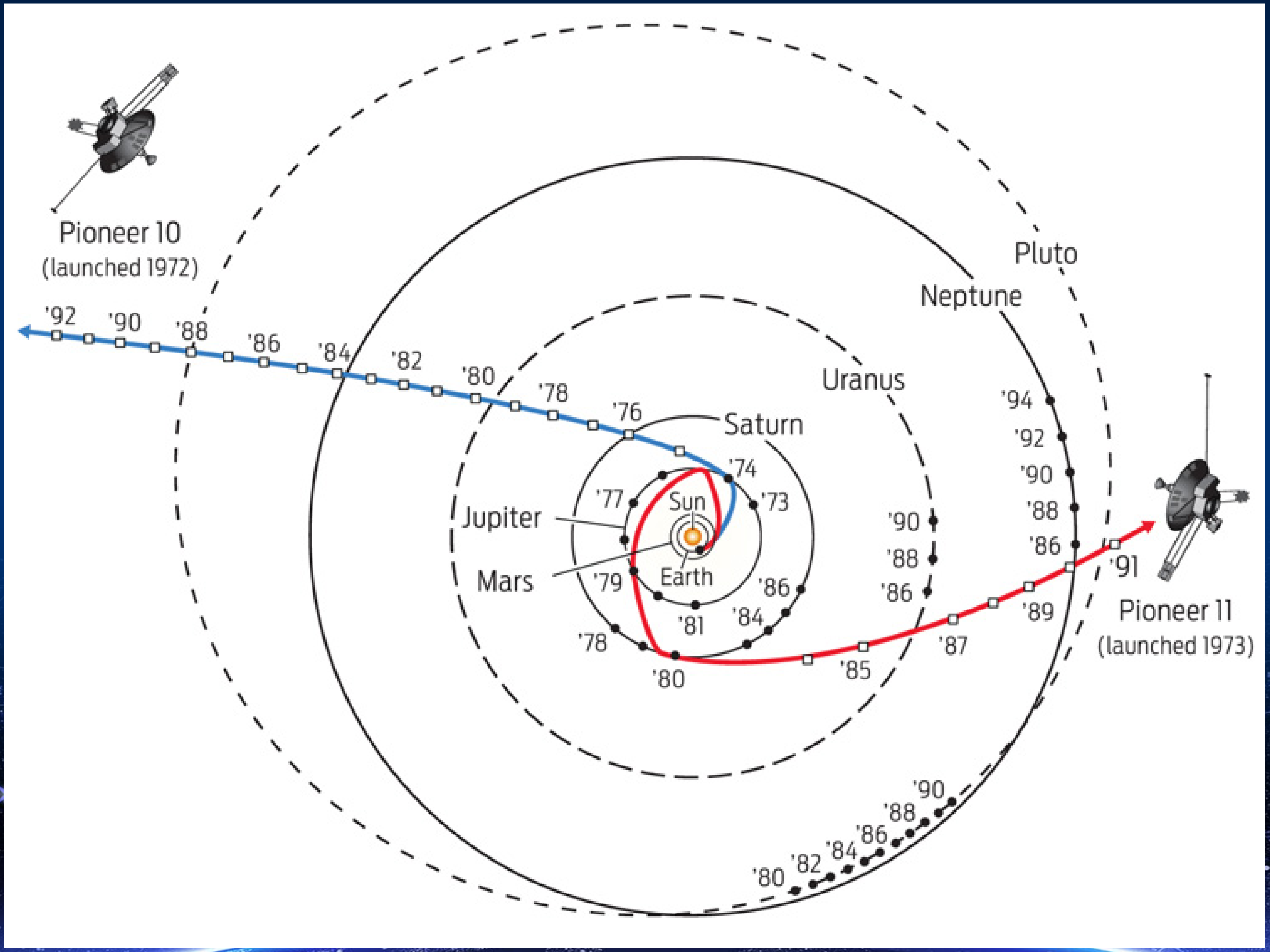
«Вояджеры»

http://www.hypernova.ru/img/articles/shema_marshruta_voyadzher.jpg



https://dzen.ru/media/deep_cosmos/chto-takoe-gravitacionnyi-manevr-5d5894f7a06eaf00adcd7a14

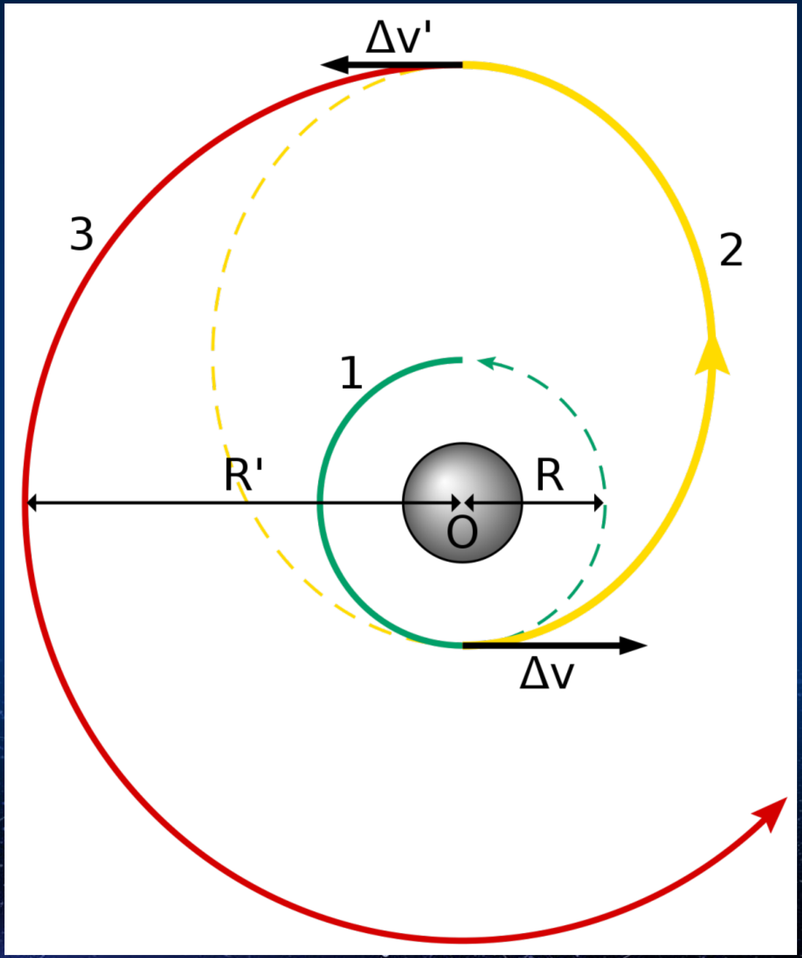
«Пионер-10» и «Пионер-11»



https://assets.kompasiana.com/statics/crawl/55b48c9724a9d58e148b4568.jpeg?t=o&v=770

Гомановская траектория

Го́мановская траекто́рия — в небесной механике эллиптическая орбита, используемая для перехода между двумя другими орбитами, обычно находящимися в одной плоскости. В простейшем случае она пересекает эти две орбиты в апоцентре и перицентре. Названа в честь немецкого учёного Вальтера Гомана. Гомановская траектория теоретически рассчитывается для двух импульсных (условно мгновенных) приращений скорости



Гомановская траектория перехода (жёлтый) с низкой круговой орбиты (зелёный) на более высокую круговую орбиту (красный). Δ*v* и Δ*v*' — первое и второе включения двигателя на разгон.

Полет на Марс по гомановской орбите

1. Большая полуось гомановской орбиты = 1.25 а.е.

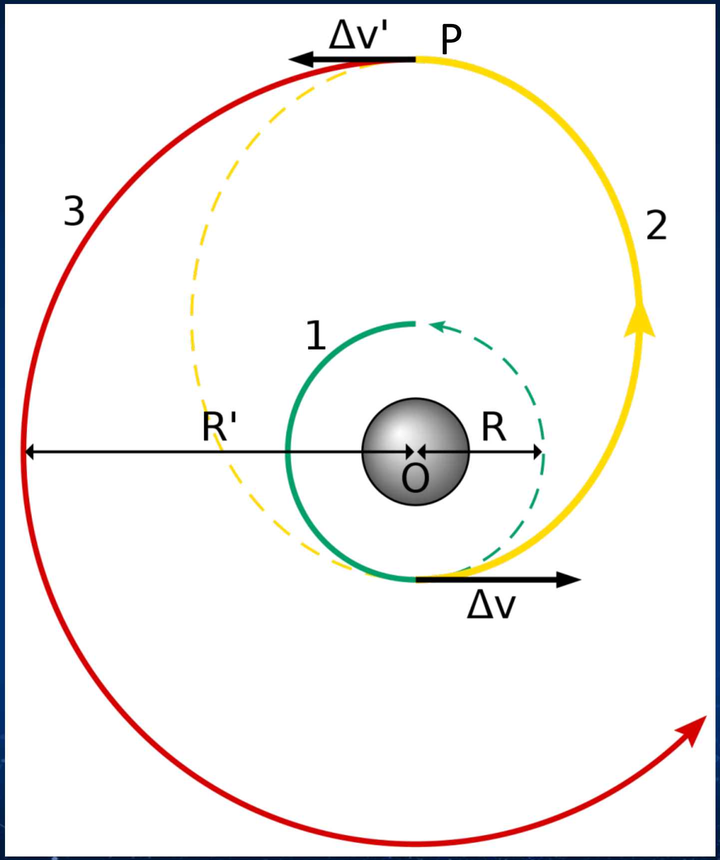
$$a_2 = \frac{R + R'}{2}$$

2. Время полета (t) до Марса составит около 0.7 года или 255 дней.

$$t = \tfrac{1}{2}\sqrt{a_2^{\ 3}}$$

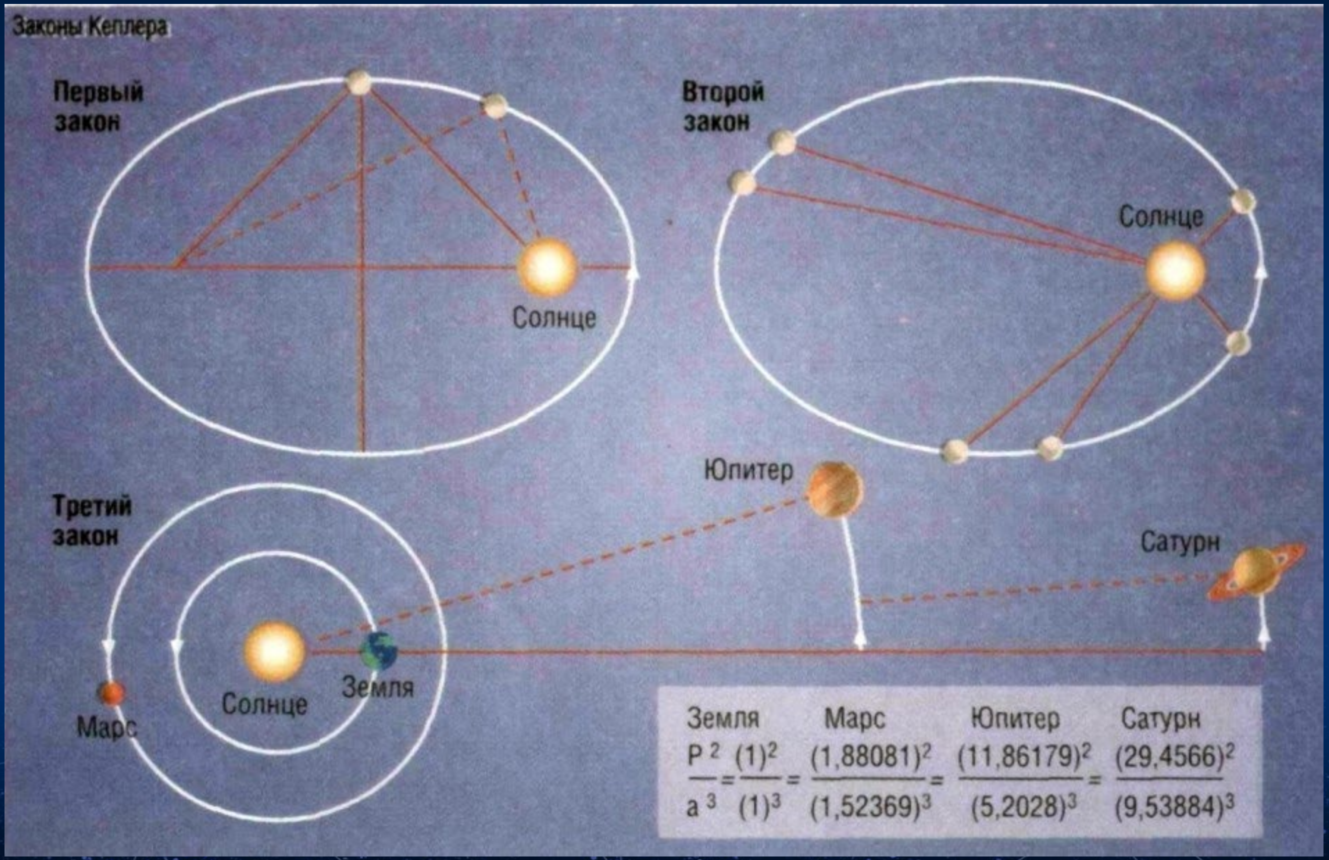
3. Чтобы КА встретился с Марсом в точке Р, необходимо, чтобы КА был запущен в момент, когда угол между направлениями на текущий положение планеты и точку Р (φ) составит:

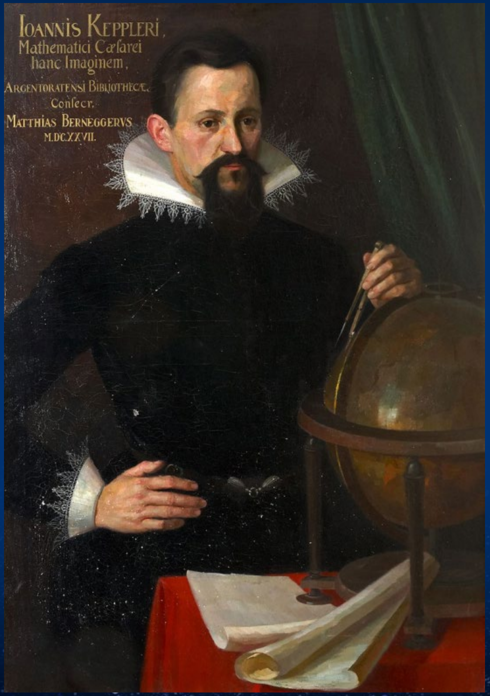
$$\varphi = 180^{\circ} - \omega t$$



где ω – угловая скорость движения Марса по орбите. Марсианский год – 1.88 лет. Тогда ω =0.524°/сут. В результате получаем 43°. Такая конфигурация выстраивается через 2.17 года.

Законы Кеплера



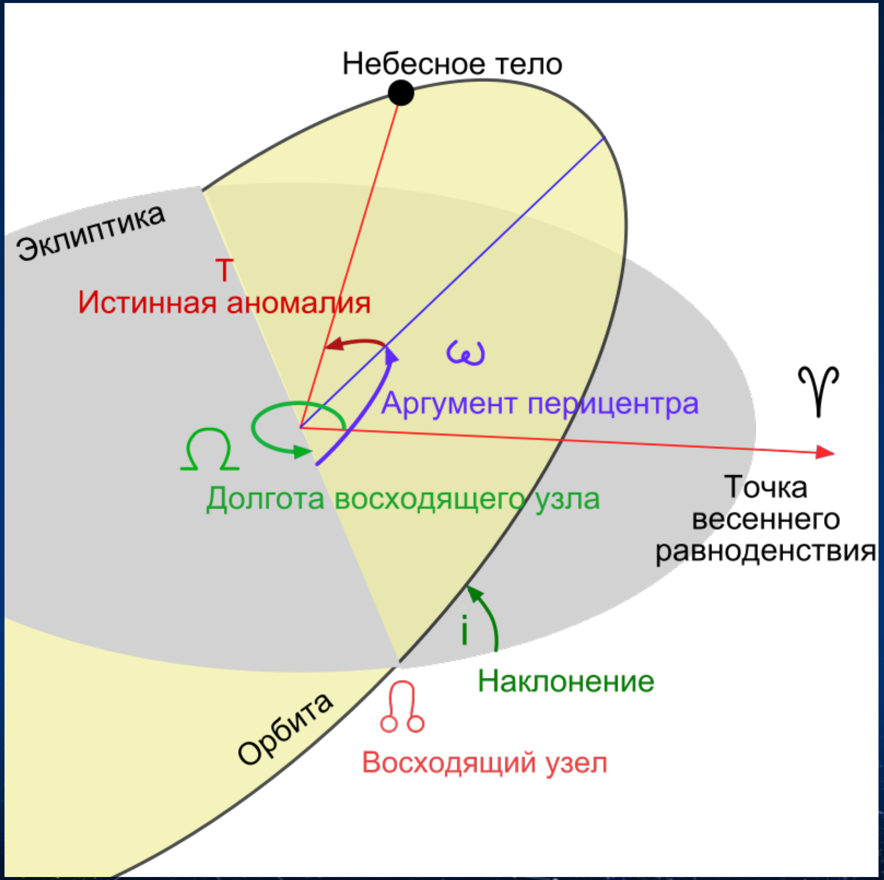


Иога́нн Ке́плер
27.12.1571 — 15.11.1630

Кеплерова орбита

Элементы орбиты:

большая полуось *a*,
эксцентриситет *e*,
наклон *i*,
долгота восходящего узла *Ω*,
аргумент перицентра *ω* ,
средняя аномалия M_0.



Элементы орбиты. Большая полуось

В случае если орбита является эллипсом, его большая полуось *a* положительна и равна половине длины большой оси эллипса, то есть половине длины линии апсид, соединяющей апоцентр и перицентр эллипса.

Определяется знаком и величиной полной энергии тела:

$$a = -\frac{GMm}{2E}$$

Связана с положением (r_0) и скоростью тела (v_0) соотношением

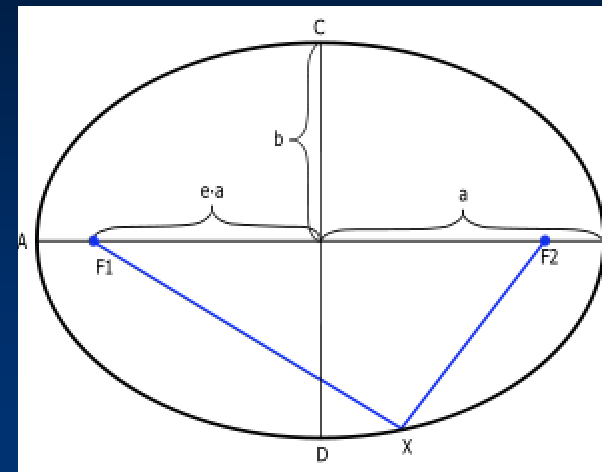
$$\frac{1}{a} = \frac{2}{r_0} - \frac{v_0^2}{\mu}$$

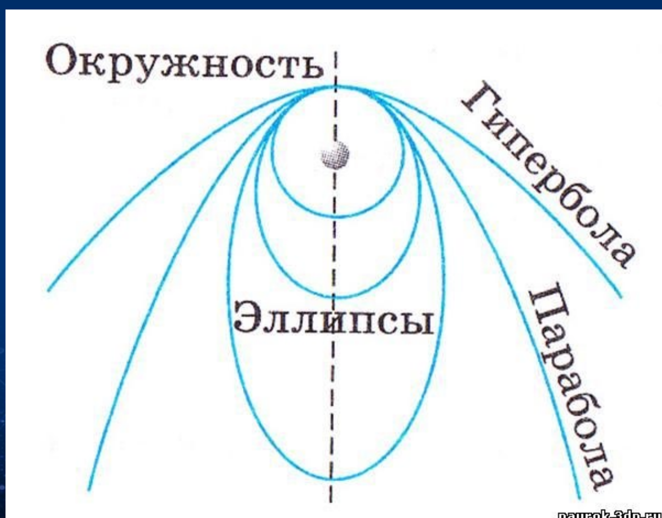
где μ — гравитационный параметр, равный произведению гравитационной постоянной на массу небесного тела.

Элементы орбиты. Эксцентриситет, наклон

e>1 — гипербола;
e=1 — парабола;
e<1 — эллипс;
e=0 — окружность.

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\vartheta}$$





$$e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$$

Если 0° < *i* < 90°, то движение небесного тела называется прямым
Если 90° < *i* < 180°, то движение небесного тела называется обратным (ретроградным).

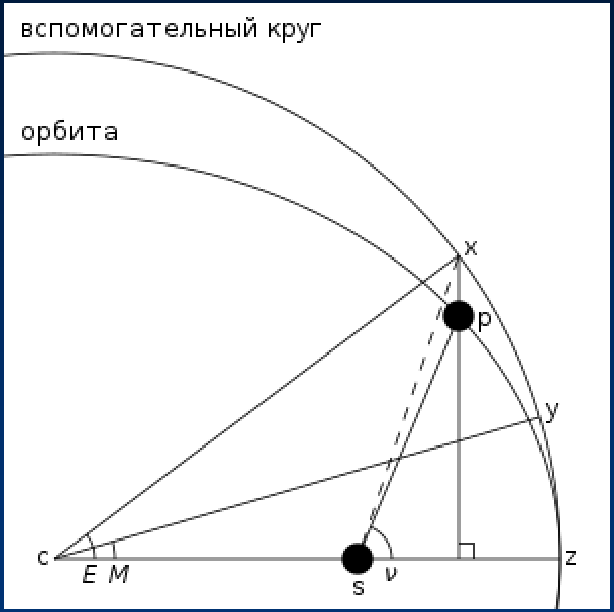
Кеплерова орбита. Аномалии

ϑ – истинная аномалия;
E – эксцентрическая аномалия;
M – средняя аномалия.

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\vartheta}$$

$$r = a(1 - e\cdot\cos E),$$

$$\operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\cdot\operatorname{tg}\frac{E}{2}$$

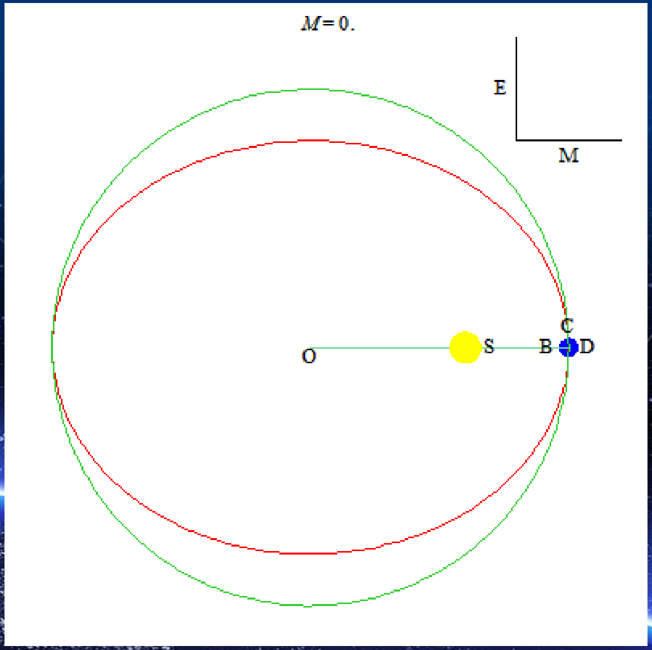


Уравнение Кеплера

$$E - e\sin E = M$$

$$M = M_0 + n(t - t_0)$$

$$n = \sqrt{\frac{G(M+m)}{a^3}},$$

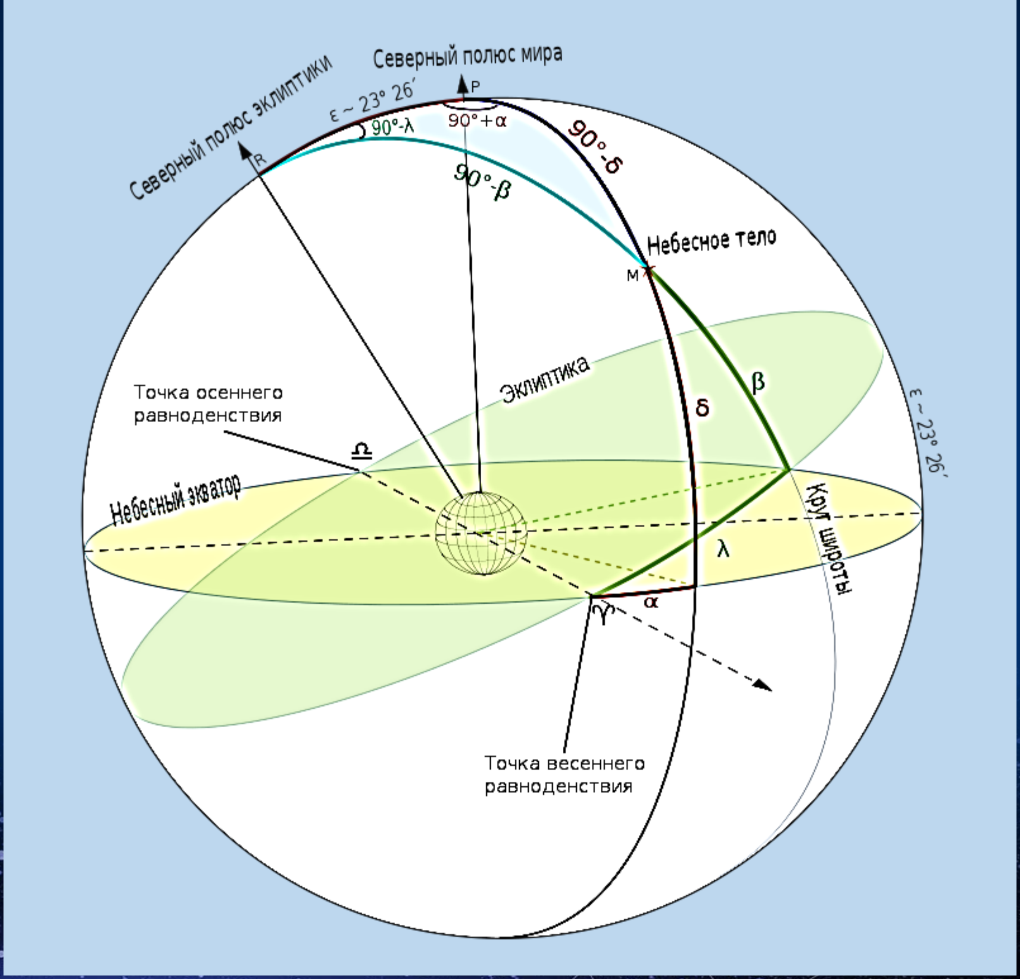


n – среднее движение

Система координат в Солнечной системе

Эклиптическая система координат:
долгота λ (0° ≤ λ ≤ 360°)
широта β (-90° ≤ β ≤ 90°)

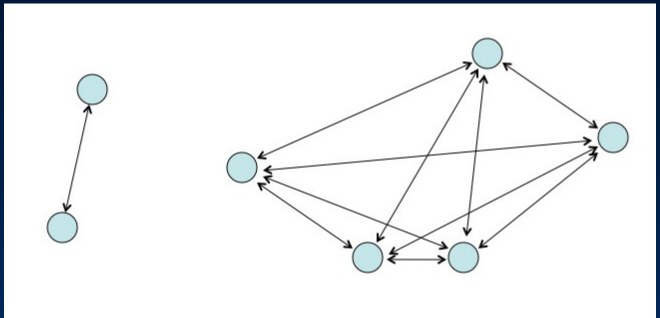
2-я экваториальная система координат:
прямое восхождение α ($0^h \le \alpha \le 24^h$)
склонение δ (-90° ≤ δ ≤ 90°)



$$\cos\beta\cos\lambda = \cos\delta\cos\alpha$$

$$\cos\beta\sin\lambda = \sin\delta\sin\varepsilon + \cos\delta\cos\varepsilon\sin\alpha$$

$$\sin\beta = \sin\delta\cos\varepsilon - \cos\delta\sin\varepsilon\sin\alpha$$



Задача N тел

Дифференциальные уравнения первого порядка

$$\frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \mathbf{v}_i\,, \qquad \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = \sum_{j\neq i}^{N} G\,m_j\,\frac{\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|^3}\,,$$

где m_i, $\mathbf{r}_i$, $\mathbf{v}_i$ — масса, радиус-вектор и скорость i-го тела соответственно (i изменяется от 1 до N), G — гравитационная постоянная. Массы тел, а также положения и скорости в начальный момент времени считаются известными. Необходимо найти положения и скорости всех частиц в произвольный момент времени.

Дифференциальные уравнения второго порядка ($\mathbf{x} = \mathbf{r}$)

$$\frac{d^2\mathbf{x}_i(t)}{dt^2} = G\sum_{\substack{k=1\\ k\neq i}}^{n} \frac{m_k\,(\mathbf{x}_k(t) - \mathbf{x}_i(t))}{|\mathbf{x}_k(t) - \mathbf{x}_i(t)|^3}\,,$$

Численное интегрирование!!!

1. Метод Рунге-Кутты (4 порядка)
2. Метод Бурлиша-Штёра
3. Метод Эверхарта
4. Симплектические методы

Планетные теории

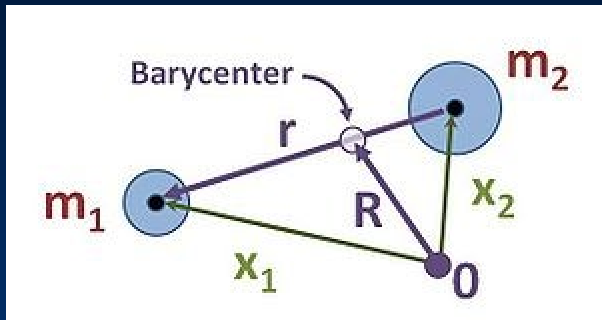
Основным общим свойством эфемерид DE и EPM является совместное численное интегрирование уравнений движения 9 больших планет, Солнца, Луны и лунной физической либрации.

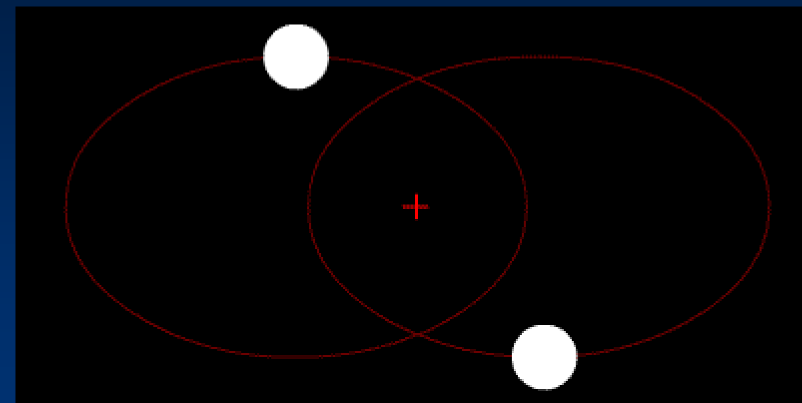
Эфемериды EPM (Ephemeris of Planets and Moon) включают высокоточные орбиты планет Солнечной системы, Солнца, Луны, пяти астероидов (Церера, Паллада, Веста, Ирида, Бамберга) и четырёх транснептуновых объектов (Эрида, Макемаке, Хаумея, Седна). Кроме того, в EPM включена эфемерида физической либрации Луны и разность динамического и земного времени TT-TDB.

Эфемериды EPM охватывают интервал времени более 400 лет (1787–2214).

С 1987 г. две динамические модели планетного движения DE (JPL, США) и EPM (ИТА, затем ИПА) независимо продолжают свое развитие. С 2006 г. к ним присоединилась и численная теория INPOP (IMCCE, Франция). Серии этих эфемерид являются наиболее завершенными, имеют одинаковую точность и адекватны современным радиотехническим и лазерным наблюдениям. Из соображений технологической независимости ИПА РАН с 2006 г. выпускает АЕ на основе собственных эфемерид – EPM, которые служат также основой для проведения разнообразных научных исследований и используются в программе ГЛОНАСС.

Частные случаи задачи N тел. Задача двух тел

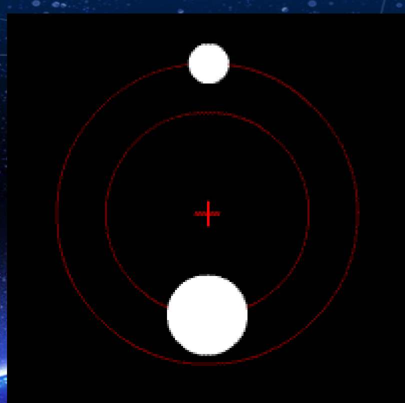




$$m_1 \mathbf{a}_1 = \frac{G m_1 m_2}{r_{12}^3}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \qquad \text{Sun–Earth}$$

$$m_2 \mathbf{a}_2 = \frac{G m_1 m_2}{r_{21}^3}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \qquad \text{Earth–Sun}$$

Аналитическим решением задачи двух тел является кеплерова орбита!



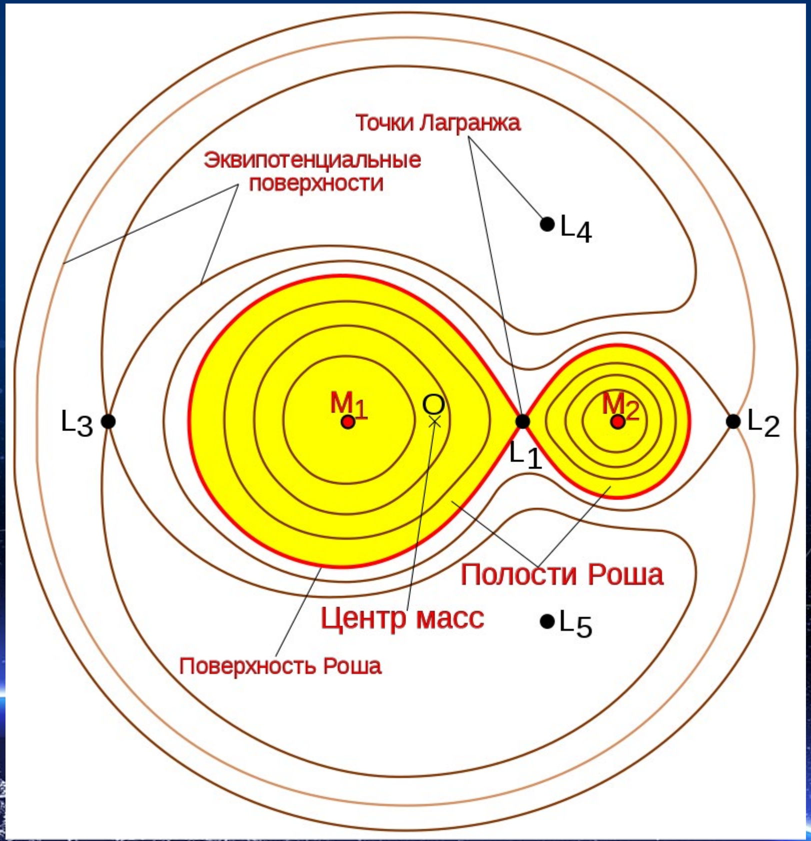
Решение может быть в прямоугольных координатах. В совокупности три координаты тела и три их первые производные (скорости) представляют собой *вектор состояния*. Из вектора состояния определяются элементы орбиты тела.

Частные случаи задачи N тел. Задача трех тел.

Задача трёх тел в астрономии — одна из задач небесной механики, состоящая в определении относительного движения трёх тел (материальных точек), взаимодействующих по закону тяготения Ньютона (например, Солнца, Земли и Луны). В отличие от задачи двух тел, в общем случае задача не имеет решения в виде конечных аналитических выражений. Известны лишь отдельные точные решения для специальных начальных скоростей и координат объектов.

$$\left.\begin{aligned}
\ddot{\boldsymbol{q}}_1 &= \gamma m_2 \frac{\boldsymbol{q}_2 - \boldsymbol{q}_1}{|\boldsymbol{q}_2 - \boldsymbol{q}_1|^3} + \gamma m_3 \frac{\boldsymbol{q}_3 - \boldsymbol{q}_1}{|\boldsymbol{q}_3 - \boldsymbol{q}_1|^3}\\
\ddot{\boldsymbol{q}}_2 &= \gamma m_1 \frac{\boldsymbol{q}_1 - \boldsymbol{q}_2}{|\boldsymbol{q}_1 - \boldsymbol{q}_2|^3} + \gamma m_3 \frac{\boldsymbol{q}_3 - \boldsymbol{q}_2}{|\boldsymbol{q}_3 - \boldsymbol{q}_2|^3}\\
\ddot{\boldsymbol{q}}_3 &= \gamma m_1 \frac{\boldsymbol{q}_1 - \boldsymbol{q}_3}{|\boldsymbol{q}_1 - \boldsymbol{q}_3|^3} + \gamma m_2 \frac{\boldsymbol{q}_2 - \boldsymbol{q}_3}{|\boldsymbol{q}_2 - \boldsymbol{q}_3|^3}
\end{aligned}\right\}$$

Например, ограниченная задача трех тел, когда $m_3 \approx 0$



Точки Лагранжа

$$r_1 = \left(R\left[1 - \left(\frac{\alpha}{3}\right)^{1/3}\right], 0\right)$$

$$r_2 = \left(R\left[1 + \left(\frac{\alpha}{3}\right)^{1/3}\right], 0\right)$$

$$r_3 = \left(-R\left[1 + \frac{5}{12}\alpha\right], 0\right)$$

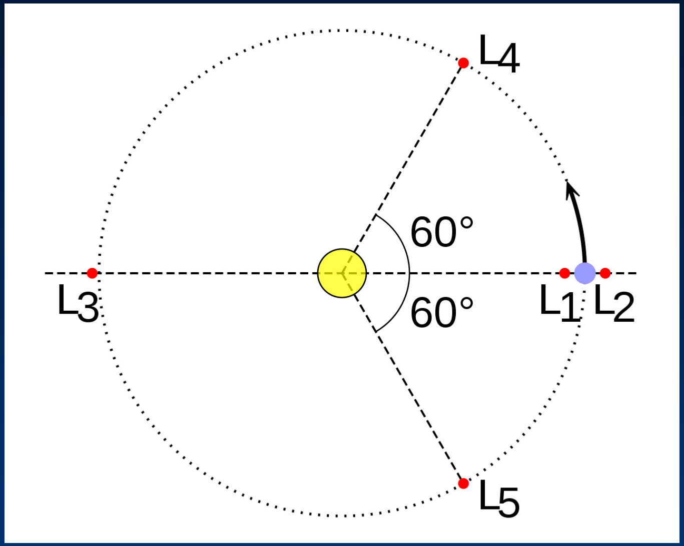
где $$\alpha = \frac{M_2}{M_1 + M_2}$$

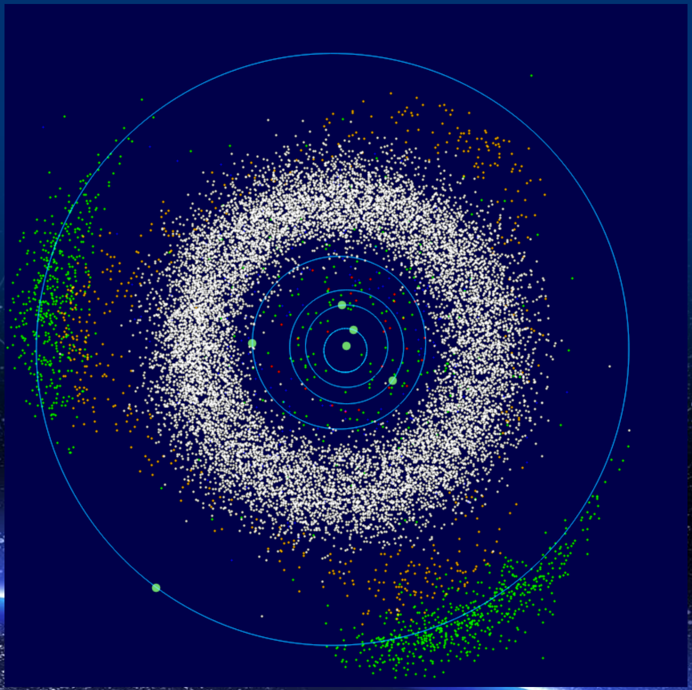
R — расстояние между телами,
M_1 — масса более массивного тела,
M_2 — масса второго тела.

$$r_4 = \left(\frac{R}{2}\beta, \frac{\sqrt{3}R}{2}\right)$$

$$r_5 = \left(\frac{R}{2}\beta, -\frac{\sqrt{3}R}{2}\right)$$

где $$\beta = \frac{M_1 - M_2}{M_1 + M_2}$$





Троянцы Юпитера

Спасибо за внимание!