

Определение параболической орбиты геометрическим методом

© В. Б. Кузнецов

ИПА РАН, г. Санкт-Петербург, Россия

Реферат

Определение предварительных орбит комет представляет интерес для кометной астрономии с точки зрения открытия новых или идентификации с уже известными кометами.

В работе рассматривается геометрический метод для определения параболической орбиты, который является частным случаем метода Коши – Курышева – Перова. В нём показано, как в рамках задачи двух тел, исходя только из геометрических построений, по четырём угловым наблюдениям определить параболическую орбиту, не лежащую в плоскости движения наблюдателя. Данный метод позволяет свести задачу к решению алгебраической системы уравнений относительно двух безразмерных переменных с конечным числом решений. При этом он не имеет ограничений на длину орбитальной дуги и интервалов времени между наблюдениями. Все возможные комбинации положения тела на орбите разделяются на 4 варианта и представляются соответствующими системами уравнений. Представлен алгоритм поиска решения задачи без предварительной информации об искомой орбите. Решения ищутся в ограниченной квадратной области, в которой производится двухуровневая триангуляция, что позволяет покрыть исследуемую область меньшим числом треугольников без потери небольших изолированных участков. При этом производится ранжирование треугольников на соответствие условиям поиска, чтобы исключить большинство из них ещё на начальном этапе. Решения системы находятся посредством поиска минимумов целевой функции по симплексу методом Нелдера — Мида. Это обеспечивает нахождение всех возможных решений. Полученные орбиты сравниваются через представление наблюдений, и из них выбирается наилучшая.

В качестве примера приведены результаты определения орбиты близпараболической кометы C/2020 F8 (SWAN).

Ключевые слова: задача двух тел, параболическая орбита, кометы, определение предварительной орбиты, метод Нелдера — Мида.

Контакты: Кузнецов Владимир Борисович (vb.kuznetsov@iaaras.ru).

Статья поступила в редакцию 30.06.2020, принята к публикации 16.09.2020, опубликована 30.12.2020.

Для цитирования: Кузнецов В. Б. Определение параболической орбиты геометрическим методом // Труды ИПА РАН. 2020. Вып. 55. С. 16–23.

<https://doi.org/10.32876/AplAstron.55.16-23>

Revisiting Geometric Method for Determination of the Parabolic Orbit

V. B. Kuznetsov

Institute of Applied Astronomy of the Russian Academy of Sciences, Saint Petersburg, Russia

Abstract

The determination of a preliminary parabolic orbit is a point of interest in the field of cometary astronomy. That can be useful for both discovering new comets and identification with known comets.

The paper describes a geometric method of the preliminary parabolic orbit determination, which is a particular case of Cauchy-Kuryshv-Perov method. It shows how, within the framework of the two-body problem, to determine the parabolic orbit that does not lie in the plane of an observer movement based on four angular observations and geometric constructions. Using this method, we can make a model as solving an algebraic system of equations for two dimensionless variables, with a finite number of solutions. Moreover, it has no restrictions on the orbital arc length and the time intervals between observations. All possible combinations of the comet orbital position are represented by the four cases of equation systems. The algorithm for finding the solutions without any preliminary information about the orbit is considered. The solutions are sought in a limited square area that has covered by two-level triangulation. Such triangulation let us to use a smaller number of triangles without losing small isolated areas. At the same time, triangles are ranked for compliance with the search conditions in order to exclude most of them at the initial stage. The solutions of the system are found by searching for the goal function minima using the Nelder-Mead simplex method. In such a way, all possible solutions are found. The calculated orbits are compared through the representation of observations and the best one is selected.

As an example, the results of determining the orbit of the near-parabolic comet C/2020 F8 (SWAN) are given.

Keywords: two-body problem, parabolic orbit, comets, determination of preliminary orbit, method of Nelder-Mead.

Contacts: Vladimir B. Kuznetsov (vb.kuznetsov@iaaras.ru).

Received 30 June, 2020, accepted 16 September, 2020, published 30 December, 2020.

For citation: Kuznetsov V. B. Revisiting geometric method for determination of the parabolic orbit // Transactions of IAA RAS. 2020. Vol. 55. P. 16–23.

<https://doi.org/10.32876/AplAstron.55.16-23>

Введение

В работе [1] для определения предварительной параболической орбиты по четырем наблюдениям, в моменты времени t_1 , t_2 , t_3 и t_4 , был предложен геометрический метод, являющийся адаптацией общего подхода по определению произвольной предварительной орбиты по пяти наблюдениям [2] к параболическим траекториям. Данная задача сводится к решению системы из двух нелинейных уравнений относительно двух переменных. Описанию численного метода решения этой системы и посвящена данная работа.

Построение системы уравнений

Обозначим через \mathbf{r}_1 , \mathbf{r}_2 , \mathbf{r}_3 и \mathbf{r}_4 радиус-векторы искомой орбиты в соответствующие моменты времени. Тогда уравнения для гелиоцентрических радиус-векторов будут иметь следующий вид:

$$\begin{cases} \mathbf{r}_1 = \mathbf{e}_1 \rho_1 - \mathbf{R}_1, \\ \mathbf{r}_2 = \mathbf{e}_2 \rho_2 - \mathbf{R}_2, \\ \mathbf{r}_3 = \mathbf{e}_3 \rho_3 - \mathbf{R}_3, \\ \mathbf{r}_4 = \mathbf{e}_4 \rho_4 - \mathbf{R}_4, \end{cases} \quad (1)$$

где \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 , \mathbf{e}_3 и \mathbf{e}_4 — единичные векторы наблюдаемого направления на объект, \mathbf{R}_1 , \mathbf{R}_2 , \mathbf{R}_3 и \mathbf{R}_4 — векторы положения Солнца относительно топцентра, ρ_i — топоцентрическое расстояние до объекта.

Для построения уравнений, описывающих параболическую орбиту, обратимся к формуле определения параметра параболической орбиты по двум радиус-векторам [3]. Четыре вектора из (1) позволяют задать три пары векторов $(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$, $(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3)$ и $(\mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4)$:

$$\begin{cases} p_{21} = \frac{r_1 r_2 - \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2}{r_1 \mp \sqrt{2(r_1 r_2 + \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2)} + r_2}, \\ p_{32} = \frac{r_2 r_3 - \mathbf{r}_2 \mathbf{r}_3}{r_2 \mp \sqrt{2(r_2 r_3 + \mathbf{r}_2 \mathbf{r}_3)} + r_3}, \\ p_{43} = \frac{r_3 r_4 - \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_4}{r_3 \mp \sqrt{2(r_3 r_4 + \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_4)} + r_4}, \end{cases} \quad (2)$$

где в знаке « \mp » знак « \rightarrow » соответствует углу между векторами меньше π , а « \leftarrow » — больше π . Так как все три значения p равны между собой, то из них можно составить два уравнения: $p_{21} - p_{32} = 0$ и $p_{32} - p_{43} = 0$ или после подстановки (2):

$$\begin{cases} f_1 = (r_1 r_2 - \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2) \left(r_2 \mp \sqrt{2(r_2 r_3 + \mathbf{r}_2 \mathbf{r}_3)} + r_3 \right) - \\ - (r_2 r_3 - \mathbf{r}_2 \mathbf{r}_3) \left(r_1 \mp \sqrt{2(r_1 r_2 + \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2)} + r_2 \right) = 0, \\ f_2 = (r_3 r_4 - \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_4) \left(r_2 \mp \sqrt{2(r_2 r_3 + \mathbf{r}_2 \mathbf{r}_3)} + r_3 \right) - \\ - (r_2 r_3 - \mathbf{r}_2 \mathbf{r}_3) \left(r_3 \mp \sqrt{2(r_3 r_4 + \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_4)} + r_4 \right) = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Стоит отметить, что в (3) только один из трех углов между векторами может быть больше π и, следовательно, система уравнений (3) имеет четыре возможных варианта представления. Из-за того, что в (3) нет ничего явно связанного с интервалами времени между наблюдениями и динамическими параметрами притягивающего центра, данный метод определения параболической предварительной орбиты можно назвать *геометрическим*.

Переход к новым переменным

Легко видеть, что два уравнения (3) содержат четыре неизвестных ρ_i ($i = 1, 2, 3, 4$) для каждого наблюдения. Для решения системы уравнений необходимо сократить число неизвестных до двух. В работе [4] для этого было предложено перейти к нормированным безразмерным переменным. Рассмотрим единичный вектор $\mathbf{N} = (N_x, N_y, N_z)$, представляющий собой вектор нормали к плоскости искомой орбиты. Для удобства связи \mathbf{N} с элементами орбиты выберем эклиптическую систему координат. Выразим ρ_i ($i = 1, 2, 3, 4$) через \mathbf{N} . Если уравнения (1) скалярно умножить на \mathbf{N} , то получим выражения для ρ_i [5]:

$$\rho_i = \frac{\mathbf{N} \mathbf{R}_i}{\mathbf{N} \mathbf{e}_i}. \quad (4)$$

Условие единичности \mathbf{N} можно определить так:

$$N_x^2 + N_y^2 + N_z^2 = 1. \quad (5)$$

Теперь мы можем подставить (4) во все приведенные выше уравнения для случая, когда плоскости орбит не совпадают с плоскостью эклиптики. И получим аналог системы (3) с ограничением (5) и безразмерными неизвестными $\{N_x, N_y, N_z\}$:

$$\begin{cases} f_1(\mathbf{N}) = 0, \\ f_2(\mathbf{N}) = 0. \end{cases} \quad (6)$$

Область решения ограничивается поверхностью единичной сферы. Точки пересечения f_1 и f_2

являются возможными направлениями \mathbf{N} . Так как уравнения (6) симметричны относительно плоскости эклиптики, то можно выбрать одну из полушфер с прямым или обратным орбитальным движением. Тогда условие (5) можно записать как:

$$N_z = \sqrt{1 - N_x^2 - N_y^2} \quad (7)$$

и отобразить область решения единичной сферы на область единичного круга эклиптики. Таким образом, мы приходим к двумерному случаю с неизвестными N_x и N_y . Дополнительным достоинством новых переменных является то, что они напрямую не связаны с конкретными наблюдениями и их числом, а это упрощает работу по созданию целевой функции. Из единичного круга следует исключить области с отрицательными топоцентрическими расстояниями и параметром орбиты p . Введение таких ограничений позволяет сузить поиск решения со всего единичного круга до его отдельных областей.

Мы свели задачу к поиску решения в единичном круге. Однако круг не очень удобен для разбиения и плотного покрытия простыми геометрическими фигурами, например треугольниками. Для триангуляции больше подходит квадрат, описывающий данный круг, т. е. имеющий длину стороны 2. Отображение круга единичного радиуса на соответствующий квадрат осуществляется по следующим формулам [6]:

$$\begin{cases} N_x = N_{xs} \sqrt{1 - 0.5N_{ys}^2}, \\ N_y = N_{ys} \sqrt{1 - 0.5N_{xs}^2}, \end{cases} \quad (8)$$

где N_{xs} и N_{ys} — координаты, соответствующие квадрату.

Предельные решения для параболической орбиты

Одной из особенностей *геометрического метода* является возможность предельных решений. Сюда относятся решения, для которых наблюдения в моменты t_1 или t_4 соответствуют положению объекта на бесконечном расстоянии. В системе (3) они существуют, но в ней неразрешимы, т. к. находятся точно на границе её определения. Здесь стоит отметить, что переменная ρ_1 входит только в f_1 , а ρ_4 — только в f_2 . Эти топоцентрические расстояния стремятся к бесконечности при стремлении к нулю знаменателей в (4): $\mathbf{Ne}_1 = 0$ и $\mathbf{Ne}_4 = 0$ соответственно. Поэтому для $\rho_1 = \infty$ в (3) примем $f_1 = \mathbf{Ne}_1 = 0$, а для $\rho_4 = \infty$ зададим $f_2 = \mathbf{Ne}_4 = 0$.

Порядок положений объекта на параболической орбите

При геометрическом решении, как правило, не учитывается порядок точек пересечения лучей зрения (наблюдений) с орбитой. Отсюда возможно

появление решений, для которых порядок соответствующих точек орбиты не соответствует хронологическому. Для их контроля можно воспользоваться следующим условием:

$$0.99999 \leq \left| \frac{\Delta\theta_{41}}{\Delta\theta_{21} + \Delta\theta_{32} + \Delta\theta_{43}} \right| \leq 1.00001, \quad (9)$$

где $\Delta\theta_{ij}$ — величины углов между \mathbf{r}_i и \mathbf{r}_j .

Особые точки в области поиска

Для безразмерных переменных $\{N_{xs}, N_{ys}\}$ существуют особые точки, в которых все ρ_i из (4) становятся неопределенными. В зависимости от того, обращается числитель или знаменатель в ноль, значение соответствующего топоцентрического расстояния может стать либо бесконечно малым, либо бесконечно большим. К тому же, положительность расстояний требует одного знака для числителя и знаменателя. Числители и знаменатели четырех уравнений (4) определяют восемь уравнений, каждое из которых можно представить кривой на нашей квадратной области поиска решений. Попарное пересечение этих кривых задает границы областей, в которых может быть определено искомое решение. Знание координат точек пересечения кривых, определяемых числителями и знаменателями (4), позволяет определить наименьший масштаб триангуляции. Уравнения в «квадратных» координатах будут иметь следующий вид ($i, j = 1, 2, 3, 4$):

$$\begin{cases} f_{\text{числ}_i} = X_i N_{xs} \sqrt{1 - 0.5N_{ys}^2} + Y_i N_{ys} \sqrt{1 - 0.5N_{xs}^2} + \\ \quad + Z_i \sqrt{1 - N_{xs}^2 - N_{ys}^2 + N_{xs}^2 N_{ys}^2}, \\ f_{\text{знам}_j} = e_{jx} N_{xs} \sqrt{1 - 0.5N_{ys}^2} + e_{jy} N_{ys} \sqrt{1 - 0.5N_{xs}^2} + \\ \quad + e_{jz} \sqrt{1 - N_{xs}^2 - N_{ys}^2 + N_{xs}^2 N_{ys}^2}, \end{cases} \quad (10)$$

где $\mathbf{R}_i = (X_i, Y_i, Z_i)$ — эклиптические векторы положения Солнца относительно топоцентра, $\mathbf{e}_j = (e_{jx}, e_{jy}, e_{jz})$ — единичные эклиптические векторы наблюдаемого направления на объект.

Система (10) нелинейная и для поиска ее решения удобно применить метод продолжения решения по параметру с наилучшей параметризацией [7]. Полученные решения дадут нам до 16 точек, минимальные и максимальные координаты которых позволят ограничить на нашем квадрате прямоугольную область с возможно наиболее плотным расположением искомых решений системы (6).

Триангуляция области решения

Решение системы (6) предлагается искать в виде минимума целевой функции

$$f_{\text{goal}}(\mathbf{N}) = f_1^2(\mathbf{N}) + f_2^2(\mathbf{N}). \quad (11)$$

Причем поиск основывается на использовании триангуляции, т. е. на разбиении области возможных решений на непересекающиеся треугольники [8]. Эти треугольники необходимы как начальное приближение для переменных симплексов — подвижных треугольников, по которым производится поиск минимума целевой функции методом Нелдера — Мида [9]. Вся максимально-возможная область решений представляет собой квадрат с длиной стороны равной 2. В качестве базовой триангуляции разобьем этот квадрат на 16×16 меньшего размера, т. е. на квадраты, с длиной стороны равной 0.125. Затем каждый из этих «малых квадратов» разобьем на 4 равносторонних треугольника, с общей вершиной в центре.

Равнобедренными треугольниками, с длиной основания 0.125, мы заполняем всю область, для которой хотя бы одна из вершин треугольника удовлетворяет условию положительности четырех уравнений (4). Исключением является «область особых точек» (описанная в предыдущем разделе). Она увеличивается во все стороны, до совпадения с границами ближайшего «малого квадрата» и получает вид прямоугольника с длиной сторон кратной 0.125. Далее мы разбиваем эту область на прямоугольники. Длина стороны по N_{xs} будет в $1/32$ от ширины области и длина по N_{ys} меньшей или равной ей для ближайшего целого по высоте области. Затем мы разбиваем полученные «малые прямоугольники» на треугольники с общей вершиной в центре. Для них также выполняется проверка того, что хотя бы для одной из вершин все $\rho_i > 0$ ($i = 1, 2, 3, 4$) и выполняется условие (9).

Таким образом мы заполняем всю область возможных решений треугольниками двух видов. Они упорядочены в последовательность по мере построения заполнения с левого нижнего угла «большого квадрата» до правого верхнего угла. За «большими треугольниками» в последовательности, по тому же правилу идут «малые».

Определение рангов треугольников

Полученное множество из нескольких сотен треугольников, с точки зрения перспективы поиска решений, можно разделить на несколько классов. В работе Самохотина и Хуторовского [8] вводится понятие ранга треугольника. Авторы предлагают произвести линейную интерполяцию возможного решения по значениям функций f_1 и f_2 в вершинах треугольника и определить где они могут иметь пересечение.

Опишем возможные ранги треугольников:

0 — ни одна из линий не пересекает ни одной из сторон треугольника (значения f_1 и f_2 для всех вершин имеют один знак);

1 — только одна из линий имеет пересечения со сторонами треугольника (значения либо f_1 , либо f_2 имеют разные знаки для разных вершин);

2 — обе линии пересекают стороны треугольника, но точка их пересечения находится вне треугольника (значения f_1 и f_2 имеют разные знаки для разных вершин, но соответствующие условия не выполняются);

3 — точка пересечения лежит внутри треугольника, но одна из сторон треугольника не пересекается ни одной из линий (соответствующие условия выполняются, но суммы знаков произведений значений f_1 и f_2 для вершин каждой из сторон нигде не равны нулю);

4 — точка пересечения лежит внутри треугольника и все три стороны треугольника пересекаются с линиями (соответствующие условия выполняются и есть стороны, для которых суммы знаков произведений значений f_1 и f_2 для их вершин равны нулю).

Подобное ранжирование удобно для уменьшения объема вычислений. При наличии треугольников с рангом 4 и 3 поиск решения следует начать с них. Затем, при отсутствии результата или для проверки его полноты, следует перейти к треугольникам с рангом 2. Обычно этого достаточно для нахождения всех приемлемых решений. К треугольникам с рангом 1 следует обращаться только в случае отсутствия решений, для того чтобы в этом окончательно убедиться.

Метод Нелдера — Мида

После того как произведено ранжирование треугольников, можно переходить к поиску решений. Для этого хорошо подходит метод Нелдера — Мида. Этот итерационный метод относится к безградиентным, т. е. без использования производных. В нем производится только оценка значений целевой функции в вершинах треугольника, деформируемого на каждой итерации. Описание алгоритма и текст программы на языке фортран представлены в [10, 11].

В качестве нулевого приближения рассматривается равнобедренный треугольник из раздела «Триангуляция области решения». После оценки целевой функции во всех вершинах симплекса находим точку (1) с максимальным значением $f_{\text{goal}}(\mathbf{N}_{(1)})$ и точку (3) с минимальным $f_{\text{goal}}(\mathbf{N}_{(3)})$. Далее, по двум вершинам (2) и (3) строим «центр тяжести» — точку (0):

$$\mathbf{N}_{(0)} = \frac{1}{2} \sum_{i=2}^3 \mathbf{N}_{(i)}. \quad (12)$$

Поиск новой вершины производится вдоль прямой (1)–(0). Сначала производится операция «отражение»: находим отражение точки (1) относительно точки (0):

$$\mathbf{N}_{(4)} = \mathbf{N}_{(0)} + \alpha (\mathbf{N}_{(1)} - \mathbf{N}_{(0)}), \quad (13)$$

где $\alpha > 0$ — коэффициент отражения.

Если $f(\mathbf{N}_{(4)}) \leq f(\mathbf{N}_{(3)})$, то вектор $\mathbf{N}_{(4)} - \mathbf{N}_{(0)}$ растягивается в соответствии с соотношением:

$$\mathbf{N}_{(5)} = \mathbf{N}_{(0)} + \gamma(\mathbf{N}_{(4)} - \mathbf{N}_{(0)}), \quad (14)$$

где $\gamma > 1$ — коэффициент растяжения. Если $f(\mathbf{N}_{(5)}) < f(\mathbf{N}_{(3)})$, то $\mathbf{N}_{(1)}$ заменяем на $\mathbf{N}_{(5)}$, в противном случае $\mathbf{N}_{(1)}$ заменяем на $\mathbf{N}_{(4)}$. Затем начинаем следующую итерацию с операции «отражение».

Если $f(\mathbf{N}_{(4)}) > f(\mathbf{N}_{(i)})$, для всех $i \neq 1$, то вектор $\mathbf{N}_{(1)} - \mathbf{N}_{(0)}$ растягивается в соответствии с соотношением:

$$\mathbf{N}_{(6)} = \mathbf{N}_{(0)} + \beta(\mathbf{N}_{(1)} - \mathbf{N}_{(0)}), \quad (15)$$

где $0 < \beta < 1$ — коэффициент сжатия. Заменяем $\mathbf{N}_{(1)}$ на $\mathbf{N}_{(6)}$, затем начинаем следующую итерацию с операции «отражение».

Если $f(\mathbf{N}_{(4)}) > f(\mathbf{N}_{(1)})$ то для всех $i \neq 3$ векторы $\mathbf{N}_{(i)} - \mathbf{N}_{(3)}$ уменьшаются в 2 раза в соответствии с формулой:

$$\mathbf{N}_{(i)} = \mathbf{N}_{(3)} + 0.5(\mathbf{N}_{(i)} - \mathbf{N}_{(3)}), \quad i = 1, 2. \quad (16)$$

Затем начинаем следующую итерацию с операции «отражение».

Критерий окончания итерационного процесса состоит в проверке условия:

$$\sqrt{\frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 [f(\mathbf{N}_{(i)}) - f(\mathbf{N}_{(0)})]^2} \leq \varepsilon, \quad (17)$$

где ε — произвольное малое число.

Поиск решений и представление наблюдений

Как было описано в разделе «Определение рангов треугольников», поиск решений осуществляется по всем треугольникам с рангами 4 и 3, если таковые имеются и 2, если в этом есть необходимость. Решения ищутся в центре тяжести каждого треугольника. Полученные решения необходимо попарно сравнить и отбросить кратные. Условием кратности будет расстояние между точками меньше заданного малого числа. Затем мы переводим координаты \mathbf{N} в квадрате на координаты на круге (8) и от эллиптических координат переходим к экваториальным [12] $\mathbf{N}^{eqv} = \{N_x^{eqv}, N_y^{eqv}, N_z^{eqv}\}$. Подставляя N^{eqv} в (4), получим значения четырех топоцентрических расстояний ρ_i ($i = 1, 2, 3, 4$). После их подстановки в (1) определим векторы гелиоцентрического положения для четырех моментов времени. С этими данными можно вычислить орбиты для всех найденных решений. Представление наблюдений наилучшим образом (значения «O-C») позволит выбрать искомое решение.

Численный пример

В табл. 1 представлены результаты определения орбиты кометы C/2020 F8 (SWAN) на короткой дуге (в знаке \mp в (3) взят знак « \leftarrow »).

Таблица 1
Наблюдения кометы C/2020 F8 (SWAN)

t (UT), год, месяц, день	α (2000), ч, мин, с	δ (2000), град, мин, с	Обсерватория
2020 04 09.33799	22 53 01.04	-38 40 51.8	Pierre Auger Observatory, Malargüe
2020 04 21.80508	23 23 05.86	-29 59 45.6	Swan Hill
2020 05 05.37103	00 22 40.75	-07 02 15.0	Slooh.com Chile Observatory, La Dehesa
2020 05 20.13253	03 01 23.01	+39 49 56.1	Observatorio Montcabre

Примечание. t — всемирное время (год, месяц, день); α — прямое восхождение (часы, минуты, секунды) и δ — склонение кометы (градусы, минуты, секунды), представленные в экваториальной системе координат, отнесенные к экватору на эпоху J2000.0.

На рис. 1 представлены графики системы (6) в «квадратных» координатах по осям N_{xs} и N_{ys} . Серым цветом закрашены области с отрицательными топоцентрическими расстояниями и там, где не выполняются условия (9), соответственно области возможных решений имеют белый цвет.

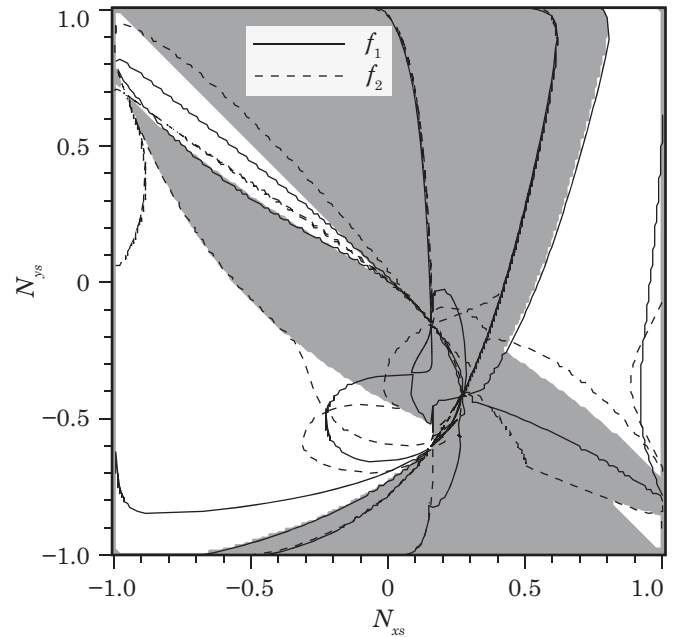


Рис. 1. Графики уравнений (6) для кометы C/2020 F8 (SWAN)

Таблица 2

Значения N_{ij} ($i, j = 1, 2, 3, 4$), полученные из уравнений (10) для C/2020 F8 (SWAN)

$j \setminus i$	1	2	3	4
1	(0.212, -0.552)	(0.294, -0.457)	(0.362, -0.361)	(0.423, -0.259)
2	(0.204, -0.534)	(0.268, -0.419)	(0.316, -0.315)	(0.355, -0.215)
3	(0.162, -0.435)	(0.160, -0.254)	(0.157, -0.157)	(0.155, -0.092)
4	(0.209, -0.545)	(0.426, -0.641)	(0.788, -0.787)	(-0.959, 0.680)

На рис. 1 можно выделить четыре области возможных решений: две небольшие и две побольше распределенные вдоль вертикальных границ квадрата. Следует отметить граничное решение для $\rho_1 = \infty$ в точке $\{0.44, -0.22\}$, на участке где функция $f_1(N)$ совпадает с $N_{e1} = 0$. Найдём координаты 16 точек пересечения (10) (табл. 2).

Все шестнадцать точек расположены в прямоугольнике $[-0.960, 0.788] \times [-0.787, 0.680]$. Увеличим его границы до величин кратных 0.125: $[-1.000, 0.875] \times [-0.875, 0.750]$ — получим прямоугольник с соотношением сторон 15:13. Его удобно разбить на 30×26 «малых» квадратов и 3120 «малых» треугольников, соответственно. Доля «больших» квадратов составит 61, а треугольников — 244. После проверки на покрытие областей возможных решений (попадание, хотя одной из вершин треугольника в белую область) останется 1598 треугольников: 97 «больших» и 1501 «малый» (рис. 2).

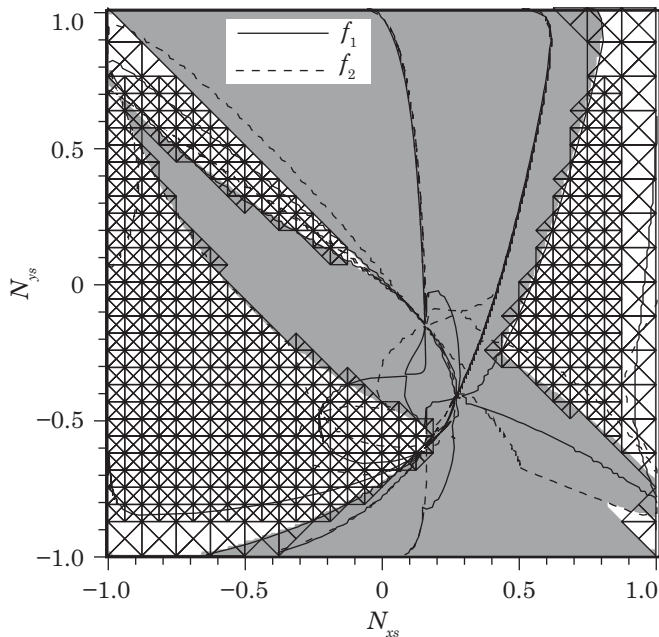


Рис. 2. Триангуляция областей возможных решений уравнений (6) для кометы C/2020 F8 (SWAN)

Таблица 3

Решения для C/2020 F8 (SWAN)

№	N_{xs}	N_{ys}	f_{goal}
1	-0.22822	-0.47741	$5.99 \cdot 10^{-17}$
2	0.92239	-0.52553	$5.80 \cdot 10^{-17}$
3	0.93169	-0.21498	$2.59 \cdot 10^{-17}$
4	-0.22869	-0.47918	$4.62 \cdot 10^{-17}$
5	1.0	-1.0	$9.63 \cdot 10^{-6}$
6	0.93488	-0.59789	$9.96 \cdot 10^{-17}$
7	1.0	-0.03125	$4.96 \cdot 10^{-8}$
8	1.0	-0.06018	$1.36 \cdot 10^{-8}$
9	-0.88076	0.62248	$4.97 \cdot 10^{-16}$
10	-0.88232	0.62234	$5.85 \cdot 10^{-17}$
11	-0.87965	0.62067	$4.35 \cdot 10^{-17}$
12	0.04798	-0.04049	$6.75 \cdot 10^{-17}$

Ранжирование треугольников дает: 14 — четвертого ранга, 2 — третьего ранга, 25 — второго, 436 — первого и 1121 — нулевого.

Поиск минимумов целевой функции (11) производился методом Нелдера — Мида при следующих заданных параметрах: $\alpha = 1$, $\beta = 0.5$, $\gamma = 2$, $\epsilon = 10^{-16}$.

Четырнадцать треугольников 4-го ранга дали 9 решений. Два треугольника 3-го ранга дали одно решение. Из 25 треугольников 2-го ранга решения были найдены для 14.

Реальных решений, конечно же, меньше 24 и поэтому необходимо отбросить все дубликаты, оставив в каждом случае лишь одно, с наименьшим значением целевой функции. В качестве минимального расстояния между различными решениями была принята величина 10^{-3} . После его проверки были получены 12 наборов решений.

Решения, в которых целевая функция принимает минимальные значения по каждому из наборов, представлены в табл. 3, где № — номер набора решений, N_{xs} и N_{ys} — «квадратные» координаты точки решения; f_{goal} — значение целевой функции в этой точке.

После перехода к эклиптическим координатам на круге (8) и от них к экваториальным координатам, из (4) были получены значения топоцентрических расстояний, которые представлены в табл. 4.

Пятое и двенадцатое решения содержит отрицательные значения топоцентрических расстояний, и могут быть сразу отброшены. Для остальных решений элементы орбит представлены в табл. 5. Момент прохождения перигелия T_0 определяется как среднеарифметическое по всем четырем значениям, полученным относительно каждого наблюдения [12].

Таблица 4

Значения ρ_1, ρ_2, ρ_3 и ρ_4 , полученные из (4) для различных орбит для C/2020 F8 (SWAN)

Орбита	ρ_1 , а. е.	ρ_2 , а. е.	ρ_3 , а. е.	ρ_4 , а. е.
«1»	1.00336	1.15563	1.35541	3.35600
«2»	1.01677	0.71238	0.41794	0.33872
«3»	1.37916	1.00496	0.63684	0.66191
«4»	1.00875	1.16098	1.35854	3.32670
«5»	0.50409	0.27346	-0.00140	1.63456
«6»	0.92595	0.64193	0.36565	0.21178
«7»	1.23523	0.97668	0.70619	0.95111
«8»	1.21121	0.95665	0.69196	0.94501
«9»	0.58642	0.42325	0.26419	0.19277
«10»	0.58751	0.42400	0.26459	0.19309
«11»	0.58617	0.42333	0.26472	0.18355
«12»	-0.07369	-0.05582	-0.04994	-0.02881

Таблица 5

Элементы параболических орбит кометы C/2020 F8 (SWAN)

Орбита	T_0 , год, месяц, день	$\Delta T_{0(41)}$, сут	q , а. е.	i , град	ω , град	Ω , град
«1»	2020 04 03.42	-129.216	0.7901	31.1857	327.7600	335.4895
«2»	2020 05 19.65	16.1159	0.6884	109.1852	30.9447	245.0523
«3»	2020 05 27.54	0.0032	0.4303	110.7786	68.2037	260.0389
«4»	2020 04 04.12	127.1818	0.7908	31.3003	328.5155	335.5340
«6»	2020 05 09.85	19.8241	0.8198	106.5314	7.1202	242.0980
«7»	2020 05 23.42	-0.2952	0.3822	90.0000	73.3764	268.7338
«8»	2020 05 23.00	0.5808	0.3818	90.0000	73.0309	267.5612
«9»	2020 04 29.06	26.3024	0.8254	68.2454	351.9163	238.3744
«10»	2020 04 29.12	26.2955	0.8253	68.4137	352.0077	238.3893
«11»	2020 04 27.70	26.3445	0.8293	68.1041	349.3416	238.4143
MPC	2020 05 31.00	—	0.4303	110.7948	68.1886	260.0380

Здесь: T_0 — момент прохождения перигелия, $\Delta T_{0(41)} = T_{0(4)} - T_{0(1)}$ — разность между T_0 полученными для четвертого и первого наблюдений, q — перигелийное расстояние, i — наклон орбиты, ω — аргумент перицентра, Ω — долгота узла. Значения $\Delta T_{0(41)}$, представленные в табл. 5, показывают,

что только третье решение имеет хорошую внутреннюю точность. Оно и является искомым. Значения «O-C» в табл. 6 подтверждают это. Элементы третьего решения хорошо совпадают с элементами, приведёнными в MPC [13].

Таблица 6

Представление наблюдений кометы C/2020 F8 (SWAN), (O-C) параболической орбитой

Орбита	t_1		t_2		t_3		t_4	
	$\Delta\alpha$, с	$\Delta\delta$, с	$\Delta\alpha$, с	$\Delta\delta$, с	$\Delta\alpha$, с	$\Delta\delta$, с	$\Delta\alpha$, с	$\Delta\delta$, с
«1»	-3.5 10 ⁴	-9.6 10 ⁴	1.2 10 ⁶	-1.2 10 ⁵	-6.0 10 ⁴	-9.0 10 ⁴	1.1 10 ⁵	9.7 10 ⁴
«2»	-2.0 10 ³	4.5 10 ⁴	-2.8 10 ³	2.8 10 ⁴	1.1 10 ³	-2.0 10 ⁴	—	—
«3»	2.6	15.5	-0.8	-5.8	-5.4	-30.2	11.3	6.8
«4»	-3.5 10 ⁴	-9.4 10 ⁴	1.2 10 ⁶	-1.2 10 ⁵	-5.9 10 ⁴	-8.9 10 ⁴	1.1 10 ⁵	9.7 10 ⁴
«6»	-1.8 10 ⁴	5.8 10 ⁴	-4.0 10 ³	4.0 10 ⁴	-1.3 10 ⁶	-1.2 10 ⁴	—	—
«7»	1.7 10 ³	9.4 10 ³	-8.2 10 ³	-1.3 10 ⁴	-1.0 10 ⁴	-3.1 10 ⁴	3.2 10 ⁴	1.7 10 ⁴
«8»	2.2 10 ³	1.2 10 ⁴	-8.8 10 ³	-1.2 10 ⁴	-1.2 10 ⁴	-3.4 10 ⁴	2.6 10 ⁴	1.3 10 ⁴
«9»	1.0 10 ⁶	1.3 10 ⁵	1.2 10 ⁶	4.7 10 ⁴	-1.3 10 ⁶	-5.8 10 ⁴	—	—
«10»	1.0 10 ⁶	1.3 10 ⁵	1.2 10 ⁶	4.8 10 ⁴	-1.3 10 ⁶	-5.8 10 ⁴	—	—
«11»	1.0 10 ⁶	1.2 10 ⁵	1.2 10 ⁶	4.7 10 ⁴	-1.3 10 ⁶	-5.4 10 ⁴	—	—

Заключение

Представленный в статье метод демонстрирует новый подход к численному решению системы уравнений для определения параболической орбиты геометрическим методом. Переход от топосцентрических расстояний в качестве неизвестных к безразмерным величинам, определяющим ориентацию орбиты, позволяет ограничить область решения и упростить алгоритм его поиска. Дополнительные ограничения на определяемые параметры также уменьшают область поиска. Двухуровневая триангуляция предоставляет возможность покрыть исследуемую область меньшим числом треугольников без потери небольших изолированных участков. Предварительный анализ треугольников позволяет уменьшить объем необходимых вычислений. Использование метода Нелдера — Мида не требует вычисления производных целевой функции и обеспечивает нахождение всех возможных решений.

Литература

1. *Kuznetsov V.* Geometric method for determination of parabolic orbits // Труды ИПА РАН. 2012. Вып. 26. С. 28–33.
2. *Курьшев В. И., Перов Н. И.* О нетрадиционном способе определения элементов орбит неизвестных космических объектов по данным обработки обзорных фотоснимков на ЭВМ // *Астрономический журнал*. 1982. Т. 59, Вып. 6. С. 1212–1217.
3. *Lagrange J. L.* Sur le probleme de la determination des orbites des cometes, d'apres trois observations. *Nouv. Mem. Acad. Roy. Sci. et Belles-Lettres*. Berlin, 1778.
4. *Кузнецов В. Б.* К вопросу об определении предварительной орбиты небесного тела // *Астрономический вестник*. 2019. Т. 53, № 6. С. 456–466.
5. *Sarnecki A. J.* A projective approach to orbit determination from three sight-lines // *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*. 1997. Vol. 66. P. 425–451.
6. *Fong C.* Analytical methods for squaring the disc. // Seoul ICM, August 13–21, 2014. Proceedings of the International congress of mathematicians. Seoul: Korea Science and Technology Center, 2014. URL: <https://fdocuments.in/document/analytical-methods-for-squaring-the-disc.html> (дата обращения 10.11.2020).
7. *Шалашилин В. И., Кузнецов Е. Б.* Метод продолжения решения по параметру и наилучшая параметризация (в прикладной математике и механике). М.: Эдиториал УРСС, 1999. 224 с.
8. *Саматовин А. С., Хуторовский З. Н.* Метод первоначального определения параметров околоземных орбит по трем угловым измерениям // *Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша*. 2014. № 44. 31 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2014-44> (дата обращения 10.11.2020).
9. *Химмельблау Д.* Прикладное нелинейное программирование. М.: Мир, 1975.
10. Язык программирования FORTRAN. Сайт По темкина В. [Электронный ресурс]. URL: <http://fortran-90.pvbk.spb.ru/min.html#FM28> (дата обращения 05.12.2020).
11. Подпрограмма MNB6R Арушяна О. Б. [Электронный ресурс]. URL: http://num-anal.srcc.msu.ru/lib_na/cat/mn/mnb6r.htm (дата обращения 05.11.2020).
12. *Дубошин Г. Н.* Справочное руководство по небесной механике и астродинамике. Издание 2-е. М.: Наука, 1976. 864 с.
13. The International Astronomical Union. Minor Planet Center [Электронный ресурс]. URL: https://minorplanetcenter.net/db_search/show_object?utf8=%E2%9C%93&object_id=C%2F2020+F8 (дата обращения 05.11.2020).