На правах рукописи

Микрюков Денис Викторович

Эволюция слабовозмущенной планетной системы на космогонических временах

01.03.01 – астрометрия и небесная механика

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург – 2021

Работа выполнена в Санкт-Петербургском государственном университете.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,
профессор,
Холшевников Константин Владиславович

Официальные оппоненты: Емельянов Николай Владимирович,
доктор физико-математических наук, профессор,
Государственный астрономический институт
им. П.К. Штернберга МГУ,
заведующий отделом небесной механики

Мельников Александр Викторович,
доктор физико-математических наук,
Федеральное государственное бюджетное
учреждение науки Главная (Пулковская)
астрономическая обсерватория
Российской академии наук,
старший научный сотрудник
Лаборатории динамики Галактики

Ведущая организация: Уральский федеральный университет имени
первого Президента России Б.Н. Ельцина

Защита состоится 18 мая 2021 года в 10 час. 00 мин. на заседании диссертационного совета Д 002.067.01 при Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте прикладной астрономии Российской академии наук по адресу: 191187, г. Санкт-Петербург, наб. Кутузова, д. 10.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института прикладной астрономии РАН и на сайте `http://www.iaaras.ru`

Автореферат разослан «____» ____________ 2021 г.

Ученый секретарь диссертационного совета
Д 002.067.01, к. ф.-м. н. Ю.С. Бондаренко

Физические основы современной небесной механики были установлены Ньютоном в конце XVII века. С тех пор на протяжении почти трех столетий изучение эволюции планетных и спутниковых орбит в Солнечной системе оставалось основной задачей небесной механики. Ситуация начала меняться примерно в середине прошлого века. Космическая эра сделала актуальными многие другие приложения небесной механики.

Вместе с развитием космонавтики происходило (и продолжается в настоящий момент) стремительное развитие наземной и космической наблюдательной техники. В результате наряду с многими важными открытиями в астрофизике и звездной астрономии были открыты первые внесолнечные планеты. В настоящее время количество известных экзопланет быстро растет и уже измеряется тысячами. Наблюдения показывают, что по своим физическим и динамическим характеристикам внесолнечные планетные системы существенно отличаются друг от друга. Например, в этих системах планеты могут обращаться по очень вытянутым орбитам (эксцентриситеты могут превышать значения $0.3 \div 0.4$). Или, например, в планетной системе экваториальная плоскость центральной звезды может быть почти перпендикулярной к плоскостям планетных орбит (системы Kepler-56 и WASP-17).

Разнообразие орбитальных и массовых параметров экзопланетных систем означает, что в этих системах могут наблюдаться разные эволюционные картины. В связи с этим задача исследования орбитальной эволюции Солнечной системы, у истоков которой стояли еще Лагранж и Лаплас, приобрела естественное развитие и не утратила своей актуальности. Исследователи для построения и проверки своих планетных теорий имеют теперь в своем распоряжении данные не только о Солнечной системе, но и о большом количестве других *реальных* планетных систем.

Обычно теория орбитальной эволюции планетных систем, и прежде всего Солнечной системы, разрабатывается исследователями для двух существенно различных интервалов времени. Прежде всего рассматриваются космогонические времена. Это относится ко всем известным планетным системам, включая Солнечную. Также рассматриваются более короткие времена, сопоставимые с временем характерного года в планетной системе. Теория движения планет на коротких временах (несколько столетий вперед и назад от настоящего момента) актуальна в настоящее время только для Солнечной системы.

Терминологическое замечание. Обычно под космогоническими временами для данной планетной системы подразумевают такие промежутки времени, которые сравнимы со временем ее существования. Такие временные интервалы намного (обычно на девять-десять) порядков превосходят характерное время обращения планет вокруг главной звезды. В настоящей работе под космогоническими временами мы будем всегда понимать промежутки времени порядка $10^4 \div 10^7$ земных лет. С точки зрения специалистов по небесной механике, а также с точки зрения смежных областей естествознания (речь идет в первую очередь об астробиологии, климатологии и палеоклиматологии) такие временные интервалы в эволюции планетной системы представляют наибольший интерес для изучения. Например, астрономическая теория климата ледниковых и межледниковых периодов Земли (теория циклов Миланковича) строится на временной шкале длительностью в миллионы лет. Далее, в большинстве планетных систем, включая Солнечную, на таких временах становится ясным общий характер изменения основных орбитальных параметров системы.

Указанные два типа планетных теорий (на коротких и космогонических временах) используются для изучения и решения различных задач.

Основной вопрос, который интересует исследователей при изучении долговременной (космогонической) эволюции планетной системы, заключается в том, устойчива эта система или нет. Под устойчивым движением планетной системы обычно понимают [см., например, 5, 26] такое поведение оскулирующих эллипсов, при котором исключено падение планет на родительскую звезду, исключены тесные сближения, столкновения и выбросы планет из системы. Обычно предполагается, что планетная конфигурация все время остается близкой к компланарной, а также, что в любой паре соседних эллипсов афелийное расстояние внутренней орбиты всегда меньше перигелийного расстояния внешней орбиты. Движение такой планетной системы на протяжении всей ее эволюции происходит в ограниченной области пространства (в предположении, что барицентр системы неподвижен), так что сформулированный тип устойчивости представляет собой специальный случай устойчивости по Лагранжу.

Теория движения планет Солнечной системы на коротких временах служит для организации оптических наблюдений, задач навигации космических аппаратов и определения и уточнения основных астрономических постоянных [12, 13, 33]. Главным результатом применения этой теории являются эфемериды наиболее крупных тел Солнечной системы. Для создания высокоточных эфемерид следует, помимо основных восьми планет, учитывать влияние многих других тел и факторов в Солнечной системе. На данный момент создано несколько основных версий высокоточных эфемерид. Например, основными отечественными эфемеридами является серия численных эфемерид EPM (Ephemerides of Planets and the Moon), разрабатываемая с 70-х годов прошлого столетия [см., например, 2, 14, 15, 33]. С момента своего создания данная серия эфемерид постоянно совершенствуется и уточняется. Выпуск EPM2019 наряду с другими важными данными содержит барицентрические положения и скорости основных восьми планет, трех крупных астероидов и пяти объектов пояса Койпера [15]. Эфемериды EPM2019 охватывают временной интервал 1787-2214 гг. и на данном интервале времени эта эфемеридная модель может служить эталоном при проверке точности и верности других динамических моделей эволюции Солнечной системы.

Космогоническую эволюцию планетных систем обычно изучают численно-аналитическими методами, в основу которых положены идеи метода осреднения. Для получения осредненных уравнений движения сначала выбирают систему оскулирующих элементов и систему координат.

В настоящее время наибольшее распространение получили координаты Якоби [9, 22, 23, 31] и введенные в употребление Пуанкаре [16, §26] канонические гелиоцентрические координаты [1, 30, 32, 34]. Менее распространена система гелиоцентрических координат Уинтнера [20, §340-§341]. Использование координат Уинтнера в планетной задаче с некоторых точек зрения представляется более естественным. Например, в отличие от координат Якоби, гелиоцентрические координаты Уинтнера не требуют разложения возмущающего потенциала системы в ряд по степеням малого параметра. Далее, в канонических гелиоцентрических координатах Пуанкаре оскулирующий эллипс каждой планеты определяется искусственным образом по ее гелиоцентрическому положению и *барицентрической* скорости. В системе координат Уинтнера оскулирующая орбита определяется обычным образом по гелиоцентрическому положению и по вектору *гелиоцентрической* скорости планеты.

Для разбиения фазовых переменных на группу медленных и группу быстрых переменных необходимо выбрать какую-либо из систем оскулирующих элементов. Наряду с использованием кеплеровых элементов сейчас в исследованиях широко применяются различные системы канонических элементов. Наибольшее распространение получили канонические элементы Пуанкаре. (Здесь и далее под каноническими элементами Пуанкаре мы подразумеваем вторую систему элементов Пуанкаре. Определение первой и второй канонических систем Пуанкаре можно найти в руководстве Субботина [19, стр. 656].) Удобство применения канонических элементов Пуанкаре обусловлено тем, что в большинстве изучаемых планетных систем (включая Солнечную) эксцентриситеты и наклоны орбит являются малыми величинами. Соответствующие канонические элементы также малы.

Указанные канонические элементы Пуанкаре являются *вещественными*. Однако существует несколько *комплексных* модификаций данных элементов. Все они выводятся из вещественных элементов Пуанкаре с помощью различных канонических преобразований и поэтому также каноничны. Красинский отмечает [1], что данные комплексные системы рассматривались еще в конце XIX века Харцером. Главное преимущество комплексных элементов Пуанкаре перед их вещественными аналогами заключается в том, что в комплексных элементах основные разложения планетной задачи имеют более компактный вид. Разница в количестве слагаемых становится особенно заметной, если разложения строятся с большой точностью. В основном используются два варианта комплексных систем Пуанкаре. Первый вариант описан Красинским в работе [1]. Определение второго варианта можно найти, например, в работе [30]. Второй вариант предпочтительнее, поскольку дающее его каноническое преобразование вещественных элементов Пуанкаре сохраняет функцию Гамильтона как физическую величину (преобразование унивалентно [7]). В варианте, используемом Красинским [1], гамильтониан домножается на мнимую единицу.

Для осреднения записанных в оскулирующих элементах уравнений могут использоваться различные методы. Выбор метода зависит от применяемой системы элементов (в первую очередь от того, канонична она или нет). Осредненные уравнения интегрируются численно. На основании результатов интегрирования можно делать выводы о космогонической эволюции рассматриваемой планетной системы. Напомним, в чем заключается основное удобство и достоинство метода осреднения при исследовании орбитальной динамики планетных систем на больших временных шкалах. Правые части осредненных уравнений зависят только от медленных переменных (в резонансных случаях может быть также зависимость от медленных комбинаций быстрых переменных), поэтому осредненное решение изменяется медленно (в силу наличия малого параметра в правых частях) и плавно (из-за отсутствия в правых частях быстрых движений). В результате осредненную систему можно интегрировать с относительно большим шагом по времени.

Описанная последовательность шагов, выполняемая исследователем, задает определенный численно-аналитический метод изучения долговременной эволюции планетной системы. В силу разнообразия существующих систем оскулирующих элементов, способов разложения возмущающей функции, а также способов осреднения, на данный момент создано довольно большое количество указанных численно-аналитических методов. Построению одного из таких методов посвящена настоящая диссертация.

Актуальность темы диссертации. Большой поток наблюдательных данных заставляет проверять и уточнять существующие планетные теории, а также создавать новые. Далее, постоянное и стремительное развитие вычислительной техники позволяет разрабатывать и применять такие планетные теории, которые требуют большого объема вычислительной работы. Вплоть до середины прошлого века многие из таких методов исследования планетного движения представляли лишь теоретический интерес, поскольку они требовали непосильного для докомпьютерной эпохи количества вычислений. Сформулированные два фактора не единственны, но они играют основную роль в обосновании актуальности темы диссертации.

Важность исследования орбитальной динамики планетных систем обусловлена также другими факторами. Многие процессы, происходящие на поверхности планеты — климатические, химические, геологические, биологические (в случае наличия у планеты биосферы) — могут существенным образом зависеть от параметров ее оскулирующей орбиты [25].

Хотя задачи космонавтики значительно расширили сферу применения небесномеханических методов, рассматриваемая нами тема оставалась актуальной на протяжении всей второй половины XX века. В этот период в СССР и за рубежом было выполнено большое количество фундаментальных исследований. Хорошо известен, например, вышедший в 80-х годах прошлого века цикл работ Ласкара [27, 28, 29], в котором с помощью численного интегрирования осредненных уравнений изучается орбитальная эволюция восьми основных планет Солнечной системы на временном интервале $3 \cdot 10^7$ лет (10^7 лет назад и $2 \cdot 10^7$ лет вперед от настоящего момента). До открытия экзопланет Солнечная система оставалась основным объектом исследования, однако ее орбитальная динамика активно изучается и в настоящее время. В начале XXI века выходит цикл работ Холшевникова, Греба и Кузнецова [3, 4, 22, 23], в котором рассматривается космогоническая эволюция Солнечной системы в рамках простейшего двупланетного приближения. Именно, Холшевниковым, Гребом и Кузнецовым [3, 4, 22, 23] были получены и проинтегрированы осредненные уравнения, описывающие поведение модельной двупланетной системы Солнце–Юпитер–Сатурн. В результате этого фундаментального исследования было установлено, что эксцентриситеты и наклоны Юпитера и Сатурна на протяжении 10^{10} лет остаются малыми и сохраняют близкий к почти-периодическому характер изменения. В более свежем цикле работ Перминова и Кузнецова [9, 10, 11] изучается долговременная эволюция четырехпланетного приближения Солнечной системы Солнце–Юпитер–Сатурн–Уран–Нептун. Перминов и Кузнецов показали [9, 10, 11], что добавление Урана и Нептуна к системе Солнце–Юпитер–Сатурн не изменяет существенным образом поведение элементов Юпитера и Сатурна. Движение всех четырех планет-гигантов имеет устойчивый и близкий к почти-периодическому характер. В указанных циклах работ [3, 4, 22, 23] и [9, 10, 11] осреднение уравнений движения выполнено до второго порядка (включительно) по планетным массам. Исследованию планетной динамики Солнечной системы посвящено огромное количество работ. Обзор работ по орбитальной эволюции основных планет Солнечной системы выполнен Холшевниковым и Кузнецовым в статье [24].

Цель и задачи работы. Основной целью настоящей работы является разработка численно-аналитического метода и его применение к исследованию орбитальной эволюции близких к круговым и компланарным планетных систем типа Солнечной на космогонических временах. Для достижения поставленной цели в работе решаются следующие задачи:

- Разложение базовых функций кеплеровского движения (прямоугольных координат и компонент скорости планеты) по основной системе оскулирующих элементов. В качестве оскулирующих элементов в настоящей работе выбраны комплексные элементы Пуанкаре.

- Запись гамильтониана планетной системы в гелиоцентрических координатах Уинтнера и разложение полученного представления в ряд Пуассона по системе оскулирующих элементов.

- Составление уравнений движения в оскулирующих элементах и осреднение этих уравнений. Используемая нами система комплексных элементов Пуанкаре канонична, поэтому данная задача решается с помощью удобного для таких случаев метода Хори–Деприи [6, 8, 21].

- Исследование долговременной эволюции модельных и реальных планетных систем с помощью интегрирования осредненных уравнений.

Для решения каждой из четырех сформулированных задач в работе выделена отдельная глава.

Путем решения первых трех задач мы строим аналитический аппарат, необходимый для получения осредненных уравнений. Четвертая задача, заключающаяся в интегрировании этих уравнений, решается численным методом.

Научная новизна работы.

- Представлен и применен алгоритм разложения основных функций кеплеровского движения по комплексным элементам Пуанкаре. Приведены явные формулы данного алгоритма. Наряду с разложением прямоугольных координат предложен метод разложения производных по времени от этих функций.

- С теоретической и практической точки зрения показано, что в планетной задаче система гелиоцентрических координат Уинтнера является достойной альтернативой ныне широко используемым координатам Якоби и координатам Пуанкаре. В использовании координат Уинтнера заключается существенная часть новизны нашей работы. В настоящее время в нашей стране применяются в основном координаты Якоби (см. цикл работ Холшевникова, Греба и Кузнецова [3, 4, 22, 23] и цикл работ Перминова и Кузнецова [9, 10, 11]), а за рубежом сейчас в планетной задаче исследователи используют, как правило, гелиоцентрические координаты Пуанкаре [см., например, 32, 34]. В СССР гелиоцентрическими координатами Пуанкаре пользовался Красинский [1].

- Для уравнений, записанных в комплексных элементах Пуанкаре, представлен и применен на практике алгоритм осреднения.

Научная и практическая ценность. Основная ценность диссертационной работы заключается в том, что построенный численно-аналитический метод дополняет существующее разнообразие методов исследования планетной орбитальной динамики. Множество промежуточных результатов работы обладает также самостоятельной ценностью.

- Приведены первые члены разложения функций кеплеровского движения по комплексным элементам Пуанкаре. Эти разложения могут использоваться в любом методе разложения планетной возмущающей функции, а не только в используемом в настоящей работе.

- Выполненный анализ числа слагаемых в рассмотренных в работе разложениях показывает, что комплексные элементы Пуанкаре позволяют получать основные разложения кеплеровского и возмущенного движения в компактном виде и с большой точностью.

- Показано, что в гелиоцентрических координатах Уинтнера среднее значение дополнительной части возмущающей функции равно нулю. Этот факт играет важную роль при построении уравнений движения в средних элементах.

- В научную базу данных Mendeley Data загружен большой отрезок разложения возмущающей функции (см. ссылку во второй главе). Разложение находится в базе данных Mendeley Data в свободном доступе. Получение данного отрезка является трудоемкой задачей, требующей выполнения большого количества промежуточных разложений невозмущенного движения. Исследователей же для построения планетных теорий не интересуют разложения невозмущенной задачи двух тел. Им, как правило, необходимо лишь иметь разложение возмущающего потенциала планетной системы.

Степень достоверности результатов. Достоверность полученных в работе результатов вытекает из согласования решений точной и осредненной систем уравнений, а также из совпадения с результатами исследований других авторов в сопоставимых случаях.

Апробация работы. Результаты, полученные в ходе настоящей работы, докладывались на саминарах Кафедры небесной механики СПбГУ, Института прикладной астрономии РАН, а также на следующих научных конференциях: на студенческой конференции «Science and Progress» (г. Санкт-Петербург, 2015 г.); на VI (2016 г.), VII (2018 г.) Пулковской молодежной астрономической конференции (г. Санкт-Петербург); на 45-ой (2016 г.), 47-ой (2018 г.) и 49-ой (2020 г.) международной студенческой конференции «Физика космоса» (г. Екатеринбург).

Объем, структура и содержание работы. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и шести приложений. Главы делятся на разделы. Разделы могут делиться на подразделы. Нумерация формул, рисунков и таблиц внутри каждой главы сплошная. Полный объём диссертации составляет 167 страниц с 27 рисунками и 12 таблицами. Список литературы содержит 101 наименование.

Во *Введении* приводится обоснование актуальности работы, формулируются основная цель, задачи, научная новизна и практическая ценность выполненного исследования. Приводятся результаты, выносимые на защиту. Указывается список статей с основными результатами работы.

В *Первой главе* определяется основная система оскулирующих элементов. Показывается, в чем заключается преимущество комплексных перед классическими (вещественными) элементами Пуанкаре. Выполняется разложение основных функций кеплеровского движения. Для решения данной задачи используется алгоритм Субботина [19, Глава XX, §10]. Данный алгоритм требует разложения разности эксцентрической и средней аномалии $z_3 = E - M$ в ряд по целым неотрицательным степеням $z_1 = e\sin M$ и $z_2 = e\cos M$

$$z_3 = z_1 + z_1 z_2 + z_1 z_2^2 - \frac{1}{2} z_1^3 + z_1 z_2^3 - \frac{5}{3} z_1^3 z_2 + z_1 z_2^4 - \frac{11}{3} z_1^3 z_2^2 + \frac{13}{24} z_1^5 + \ldots \quad (1)$$

Разложение (1) представляет собой ряд по степеням эксцентриситета с коэффициентами, зависящими от средней аномалии M. При любом вещественном M этот ряд сходится абсолютно лишь для значений e, меньших предела Лапласа [20].

Алгоритм Субботина указывает путь разложения прямоугольных координат планеты в степенной ряд по вещественным элементам Пуанкаре. Основная цель первой главы заключается в разработке такой модификации данного алгоритма, в которой вместо вещественных используются комплексные элементы Пуанкаре. После разложения прямоугольных координат мы строим метод разложения прямоугольных компонент скорости планеты.

Вторая глава посвящена разложению гамильтониана системы в ряд Пуассона. Данная процедура необходима для построения осредненных уравнений. Разложение строится в гелиоцентрических координатах Уинтнера. Для разложения обратного расстояния между двумя планетами используется метод Ласкара и Робютеля [30]. Этот метод благодаря определенному свойству коэффициентов Лапласа дает компактное и удобное представление разложения главной части возмущающей функции. (Способы разложения возмущающей функции, в которых используются эффективные свойства коэффициентов Лапласа, рассматривались также Субботиным [17, 18].) Обратное расстояние в фиксированной планетной паре разлагается по системе комплексных элементов Пуанкаре в ряд Пуассона

$$\frac{a_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} = \sum C_{\ell w n} X_1^{\ell_1} X_2^{\ell_2} Y_1^{\ell_3} Y_2^{\ell_4} \bar{X}_1^{w_1} \bar{X}_2^{w_2} \bar{Y}_1^{w_3} \bar{Y}_2^{w_4} \operatorname{Exp}(n_1\lambda_1 + n_2\lambda_2),$$

где вещественные коэффициенты $C_{\ell w n} = C_{\ell_1\ell_2\ell_3\ell_4 w_1 w_2 w_3 w_4 n_1 n_2}(\alpha)$ аналитически выражаются через α с использованием коэффициентов Лапласа.

После разложения в ряд Пуассона главной и дополнительной части возмущающей функции разбираются основные аспекты ее практического разложения. Приводится удобный метод вычисления числа слагаемых в фиксированном отрезке разложения.

В *Третьей главе* строятся осредненные уравнения движения. Используется метод осреднения Хори–Деприи. Основное внимание уделяется построению систем первого и второго приближения. Гамильтониан $H = H_0 + \mu H_1$ определяет уравнения первого приближения

$$\dot{X}_s = \mu \frac{-2\mathfrak{i}}{\Lambda_s} \frac{\partial H_1}{\partial \bar{X}_s}, \qquad \dot{Y}_s = \mu \frac{-\mathfrak{i}}{2\Lambda_s} \frac{\partial H_1}{\partial \bar{Y}_s}, \qquad 1 \leqslant s \leqslant N. \tag{2}$$

В нерезонансном случае система (2) воспроизводит основные динамические характеристики эволюции орбит. Уравнения второго приближения

$$\begin{aligned} \dot{X}_s &= \frac{-2\mathrm{i}}{\Lambda}\left(\mu\frac{\partial H_1}{\partial \bar{X}_s} + \mu^2\frac{\partial H_2}{\partial \bar{X}_s}\right), \\ \dot{Y}_s &= \frac{-\mathrm{i}}{2\Lambda}\left(\mu\frac{\partial H_1}{\partial \bar{Y}_s} + \mu^2\frac{\partial H_2}{\partial \bar{Y}_s}\right), \qquad 1 \leqslant s \leqslant N \end{aligned} \tag{3}$$

задаются гамильтонианом

$$H = H_0 + \mu H_1 + \mu^2 H_2. \tag{4}$$

Даются общие замечания относительно построения систем более высоких приближений. Для случая двух планет строится разложение в ряд Пуассона коэффициентов H_1 и H_2 осредненного гамильтониана (4). Обсуждаются особенности этого разложения в многопланетном случае. Разбираются основные практические аспекты составления и численного интегрирования осредненных уравнений. Дается информация о количестве слагаемых в правых частях осредненных уравнений и в осредненном гамильтониане.

В заключительной *Четвертой главе* построенным численно-аналитическим методом исследуется долговременная эволюция нескольких модельных и двух реальных планетных систем. Рассматриваются только такие системы, в которых значения (средних) больших полуосей далеки от резонансных. Полученные результаты сравниваются с результатами других авторов, а также с результатами интегрирования точных уравнений движения. Сделан вывод, что уравнения второго приближения (3) описывают поведение планетных орбит более точным образом, чем уравнения первого приближения (2). В конце главы обсуждаются результаты интегрирования осредненных уравнений.

В *Заключении* приведены основные результаты диссертационной работы.

Приложения содержат относящийся к первым двум главам вспомогательный материал.

Результаты, выносимые на защиту.

1. Предложен и применен метод разложения основных функций кеплеровского движения по системе комплексных элементов Пуанкаре.

2. Представлен и реализован на практике метод разложения гамильтониана планетной задачи в гелиоцентрических координатах Уинтнера.

3. Разработан и применен метод построения осредненных уравнений движения в комплексных элементах Пуанкаре.

4. Определены и изучены основные характеристики орбитальной эволюции в нескольких модельных, а также в двух реальных планетных системах HD 12661 и υ Andromedae.

Публикации по результатам работы. Основные материалы диссертации опубликованы в следующих работах:

1. *Микрюков Д.В.*, *Холшевников К.В.* Разложение основных функций кеплеровского движения с использованием комплексных переменных // Письма в Астрономический Журнал, том 42, №4, 2016, с. 302-310.

2. *Микрюков Д.В.* Разложение гамильтониана планетной задачи в ряд Пуассона в гелиоцентрической системе отсчета // Письма в Астрономический Журнал, том 42, №8, 2016, с. 611-622.

3. *Микрюков Д.В.* Осреднение уравнений планетной задачи в астроцентрической системе отсчета // Письма в Астрономический Журнал, том 44, №5, 2018, с. 361-375.

4. *Микрюков Д.В.* Исследование устойчивости планетной системы на космогонических временах // Письма в Астрономический Журнал, том 46, №4, 2020, с. 366-380.

Тезисы докладов по результатам диссертационной работы опубликованы в следующих сборниках трудов конференций и сборниках тезисов докладов:

1. *Mikryukov D.V.* Expansion of the Planetary Disturbing Function in the Computer Algebra System Piranha // International Student Conference «Science and Progress – 2015» (Conference abstracts), St. Petersburg, Peterhof, November, 9-13, 2015, p. 45.

2. *Микрюков Д.В.*, *Холшевников К.В.* Разложение основных функций кеплеровского движения с использованием комплексных переменных //

Труды 45-й Международной студенческой научной конференции «Физика космоса», Екатеринбург, 1-5 февраля 2016 г., с. 223.

3. *Микрюков Д.В.* Разложение гамильтониана планетной задачи в ряд Пуассона в гелиоцентрической системе отсчета // Труды 45-й Международной студенческой научной конференции «Физика космоса», Екатеринбург, 1-5 февраля 2016 г., с. 257.

4. *Микрюков Д.В.* Разложение гамильтониана планетной задачи в ряд Пуассона в гелиоцентрической системе отсчета // VI Пулковская молодежная астрономическая конференция. Программа и тезисы докладов, Санкт-Петербург, 6-8 июня 2016 г., с. 26.

5. *Микрюков Д.В.* Осреднение уравнений планетной задачи в гелиоцентрической системе отсчета // Труды 47-й Международной студенческой научной конференции «Физика космоса», Екатеринбург, 29 января - 2 февраля 2018 г., с. 208-209.

6. *Микрюков Д.В.* Осреднение уравнений планетной задачи в астроцентрической системе отсчета // VII Пулковская молодежная астрономическая конференция. Программа и тезисы докладов, Санкт-Петербург, 28-31 мая 2018 г.

7. *Микрюков Д.В.* Исследование устойчивости планетной системы на космогонических временах // Труды 49-й Международной студенческой научной конференции «Физика космоса», Екатеринбург, 27-31 января 2020 г., с. 180-181.

Список литературы

1. *Красинский Г.А.* Основные уравнения планетной теории. Сб. Малые Планеты, под ред. *Самойловой-Яхонтовой Н.С.* М.: Наука, 1973, с. 81.

2. *Красинский Г.А., Питьева Е.В., Свешников М.А., Свешникова Е.С.* Аналитическая теория движения внутренних планет АТ-1 и ее использование для решения задач эфемеридной астрономии // Труды ИТА АН СССР, 1978, том 17, с. 46-53.

3. *Кузнецов Э.Д., Холшевников К.В.* Разложение гамильтониана двупланетной задачи в ряд Пуассона по всем элементам: применение пуассоновского процессора // Астрон. вестн., 2004, том 38, с. 171-179.

4. *Кузнецов Э.Д., Холшевников К.В.* Динамическая эволюция слабовозмущенной двупланетной системы на космогоническом интервале времени: система Солнце–Юпитер–Сатурн // Астрон. вестн., 2006, том 40, с. 263-275.

5. *Кузнецов Э.Д., Холшевников К.В.* Запас устойчивости двупланетных систем по массам планет // Астрон. вестн., 2009, том 43, с. 230-239.

6. *Маркеев А.П.* Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М.: Наука, 1978, 312 с.

7. *Маркеев А.П.* Теоретическая механика: Учебник для университетов. М: ЧеРо, 1999, 572 с.

8. *Морбиделли А.* Современная небесная механика. Аспекты динамики Солнечной системы. М.: ИКИ, 2014, 432 с.

9. *Перминов А.С., Кузнецов Э.Д.* Разложение гамильтониана планетной задачи в ряд Пуассона по элементам второй системы Пуанкаре // Астрон. вестн., 2015, том 49, с. 469-480.

10. *Перминов А.С., Кузнецов Э.Д.* Построение осредненных уравнений движения планетной задачи методом Хори–Деприм в элементах второй системы Пуанкаре // Астрон. вестн., 2016, том 50, с. 450-461.

11. *Перминов А.С., Кузнецов Э.Д.* Орбитальная эволюция четырехпланетной системы Солнце–Юпитер–Сатурн–Уран–Нептун на космогонических интервалах времени // Астрон. вестн., 2018, том 52, с. 239-259.

12. *Питьева Е.В.* Высокоточные эфемериды планет — EPM и определение некоторых астрономических постоянных // Астрон. вестн., 2005, том 39, с. 202-213.

13. *Питьева Е.В.* Высокоточные эфемериды ИПА РАН — EPM для проведения научных исследований, навигации на Земле и в космосе // История науки и техники, 2013, № 3, с. 115-132.

14. *Питьева Е.В., Павлов Д.А.* Новая версия эфемерид планет и Луны — EPM2015 // Труды ИПА РАН, 2017, вып. 43, с. 42-52.

15. *Питьева Е.В., Павлов Д.А., Питьев Н.П.* Динамическая модель Солнечной системы в эфемеридах планет EPM // Труды ИПА РАН, 2019, вып. 51, с. 82-92.

16. *Пуанкаре А.* Лекции по небесной механике. М.: Наука, 1965, 572 с.

17. *Субботин М.Ф.* Об одном способе улучшения сходимости тригонометрических рядов, имеющих основное значение для небесной механики // Доклады АН СССР, 1943, том 40, с. 343-347.

18. *Субботин М.Ф.* Улучшение сходимости основных разложений теории возмущенного движения // Бюллетень ИТА АН СССР, 1947, том IV, с. 1-16.

19. *Субботин М.Ф.* Введение в теоретическую астрономию. М.: Наука, 1968, 800 с.

20. *Уинтнер А.* Аналитические основы небесной механики. М.: Наука, 1967, 524 с.

21. *Холшевников К.В.* Асимптотические методы небесной механики. Л.: Издательство ЛГУ, 1985, 208 с.

22. *Холшевников К.В., Греб А.В., Кузнецов Э.Д.* Разложение гамильтониана планетной задачи в ряд Пуассона по всем элементам (теория) // Астрон. вестн., 2001, том 35, с. 267-272.

23. *Холшевников К.В., Греб А.В., Кузнецов Э.Д.* Разложение гамильтониана двупланетной задачи в ряд Пуассона по всем элементам: оценка и прямое вычисление коэффициентов // Астрон. вестн., 2002, том 36, с. 75-87.

24. *Холшевников К.В., Кузнецов Э.Д.* Обзор работ по орбитальной эволюции больших планет Солнечной системы // Астрон. вестн., 2007, том 41, с. 291-329.

25. *Шараф Ш.Г., Будникова Н.А.* О вековых изменениях элементов орбиты Земли, влияющих на климаты геологического прошлого // Бюллетень ИТА АН СССР, 1967, том XI, с. 231-261.

26. *Kholshevnikov K.V., Kuznetsov E.D.* Stability of planetary systems with respect to masses // Celest. Mech. and Dyn. Astron. 2011, vol. 109, p. 201-210.

27. *Laskar J.* Accurate methods in general planetary theory // Astron. Astrophys. 1985, vol. 144, p. 133-146.

28. *Laskar J.* Secular terms of classical planetary theories using the results of general theory // Astron. Astrophys. 1986, vol. 157, p. 59-70.

29. *Laskar J.* Secular evolution of the solar system over 10 million years // Astron. Astrophys. 1988, vol. 198, p. 341-362.

30. *Laskar J., Robutel P.* Stability of the planetary three-body problem. I. Expansion of the Planetary Hamiltonian // Celest. Mech. and Dyn. Astron. 1995, vol. 62, p. 193-217.

31. *Lee M.H., Peale S.J.* Secular evolution of hierarchical planetary systems // Astrophys. Journ. 2003, vol. 592, p. 1201-1216.

32. *Libert A.-S., Sansottera M.* On the extension of the Laplace-Lagrange secular theory to order two in the masses for extrasolar systems // Celest. Mech. and Dyn. Astron. 2013, vol. 117, p. 149-168.

33. *Pitjeva E.V., Pitjev N.P.* Development of planetary ephemerides EPM and their applications // Celest. Mech. and Dyn. Astron. 2014, vol. 119, p. 237-256.

34. *Rodríguez A., Gallardo T.* The dynamics of the HD 12661 extrasolar planetary system // Astrophys. Journ. 2005, vol. 628, p. 1006-1013.