Совершенствование теории высот в геодезии

© С. С. Рахмонов[1], В. В. Попадьев[1,2]

[1]МИИГАиК, г. Москва, Россия
[2]ППК Роскадастр, г. Москва, Россия

Реферат

Пока еще не решенной проблемой в геодезии остается создание международной системы высот, которая по сути является системой разностей потенциалов, преобразование которых в линейную меру выполняется по правилам принятой системы высот: ортометрической, нормальной или нормально-ортометрической. Поскольку на практике в разных нивелирных сетях традиционно применяются разные системы высот (ортометрические — в большинстве стран Запада, нормальные — в странах СНГ), то при реализации общей системы высот появляется необходимость в выборе наиболее подходящей теории. Для обоснованного выбора нужно естественным образом разработать систему критериев, выполнить контрольные вычисления, сравнить их результаты, и в итоге определить наиболее подходящую систему не только практически, но и теоретически. Такие исследования можно провести, прибегнув к математическому моделированию с применением компьютерных программ, например MATLAB. Важным здесь является создание адекватной численной модели, близкой к физической, на примере которой будет выполнена проверка. При таких исследованиях особую роль играет отделение исходных определений от рабочих формул, а также четкое разделение элементов реального и нормального полей.

Полученные на основе такого моделирования результаты позволили показать, что нормальные высоты имеют намного больше преимуществ по отношению к ортометрическим, самое главное из которых известно давно — это строгость вычисления нормальной высоты, в отличие от ортометрической. Тем не менее, и сама нормальная высота может рассматриваться как отрезок в трех вариантах: нормаль к эллипсоиду, координатная линия сфероидальной системы координат и силовая линия нормального поля силы тяжести. Получен способ высокоточного вычисления нормальной высоты как длины координатной линии в сфероидальной системе координат. Установленные преимущества нормальных высот позволяют применять ее в качестве рабочей системы высот в международной системе.

Ключевые слова: геоид, системы высот, нормальная высота, высота над уровнем моря, координатная линия, силовая линия, способы отыскания геоида.

Контакты для связи: Рахмонов Самандар Саматович (rahmonov_samandar@inbox.ru).

Для цитирования: Рахмонов С. С., Попадьев В. В. Совершенствование теории высот в геодезии // Труды ИПА РАН. 2024. Вып. 68. С. 36–42.
https://doi.org/10.32876/ApplAstron.68.36-42

Improving the Theory of Heights in Geodesy

S. S. Rakhmonov[1], V. V. Popadyev[1,2]

[1]MIIGAiK, Moscow, Russia
[2]PLC “Roskadastr”, Moscow, Russia

Abstract

The problem in geodesy that has not been solved yet is the development of an international elevation system, which is essentially a system of potential differences, the transformation of which gives a linear measure of the elevation system used in high-precision leveling (orthometric, normal or dynamic). Since in practice different countries use different height systems (e. g. orthometric — in Western countries and normal — in CIS countries) when implementing a general elevation system, there is a need to select the most appropriate one. For an informed choice, it is necessary to develop a system of criteria, perform control calculations, and compare their results, and thereby identifying the most suitable system. Such calculations can be carried out by resorting to physical modeling using mathematical tools (MATLAB). The important thing here is to design an adequate physical model, on the example of which the test will be performed. A special role is played by the initial definitions, and a clear separation of the elements of the real and normal fields, since they significantly affect the type of height.

The numerical results obtained on the physical model allowed us to prove that normal heights have much more advantages over to the orthometric ones. The most important of them has been known for a long time to be the rigor of calculating the normal height, which the orthometric one is lacking. The normal height can be viewed as a segment of three lines: normal, coordinate and force. Along the way, a method for calculating the normal height as the length of a coordinate line in a spheroidal coordinate system has been obtained. The established advantages of normal heights allow it to be used as a working height system in the international system.

Keywords: geoid, systems altitude, normal altitude, altitude above sea level, coordinate line, power line, geoid search method.

Contacts: Samandar S. Rakhmonov (rahmonov_samandar@inbox.ru).

For citation: Rakhmonov S. S., Popadyev V. V. Improving the theory of heights in geodesy // Transactions of IAA RAS. 2024. Vol. 68. P. 36–42.

https://doi.org/10.32876/ApplAstron.68.36-42

Введение

Создание международной системы высот, International Height Reference Frame (IHRF), является одной из главных научных проблем в геодезии (Попадьев, Рахмонов, 2022). В своей основе эта система высот является системой разностей потенциалов $C = W_0 - W$, где W — потенциал в точке вычисления, W_0 — потенциал в начальном пункте счёта высот, выраженных затем в линейной мере (в виде ортометрической H^g или нормальной H^γ высоты). Основная цель создания IHRF — установление связи нивелирных сетей разных континентов.

Теория высот в поле силы тяжести Земли изучена и изложена в трудах многих отечественных (Еремеев, Юркина, 1972; Юркина, 1996; Демьянов и др., 2009) и зарубежных ученых. Сейчас мы можем оценить достоинства и недостатки различных трактовок и общие соображения этого вопроса, разработать критерии сравнения, создать стройную систему доказательств, рассмотреть нормальную высоту как элемент теории определения внешнего гравитационного поля и фигуры Земли или в отрыве от нее. Понятие «нормальная высота» было введено в 1951 г. В. Ф. Еремеевым (Еремеев, 1951) по предложению М. С. Молоденского, вместо используемого до этого рабочего термина «вспомогательная высота», поскольку «нормальная высота» лучше соответствует физическому смыслу и отнюдь не играет вспомогательную роль.

Важным при выборе той или иной системы высот является удобство применения в конкретных условиях, определяемых обликом планеты или ее спутника.

Сравнивать ортометрическую и нормальную высоты можно с разных сторон. Определим следующие основные критерии сравнения:

1. Возможность теоретически точного вычисления на основе измеренной разности потенциалов.

2. Поведение высот **на** земной поверхности. Исследования высот на земной поверхности охватывают период с 1950 по 1970 гг., и их результаты изложены, в основном, в Трудах ЦНИИГАиК (Еремеев, 1951; Еремеев, Юркина, 1972).

3. Поведение высот внутри Земли наглядно представлено в статье (Попадьев, 2018), при этом использованы методы, схожие с «наземными», которые применялись в работах 1950–1970-х гг.

4. Поведение высот над земной поверхностью на большом удалении (асимптотические свойства) отражено в докладе (Popadyev, Rakhmonnov, 2022).

5. Поведение высот на уровенных поверхностях замкнутых водоемов и гидротехнических сооружений достаточно хорошо известно: здесь оптимальными являются динамические высоты; эти случаи являются хоть и частными, но важными для практики.

Несмотря на проработку первых двух критериев, вопрос о применимости ортометрических высот до сих пор актуален для многих авторов. Последние десятилетия разрабатываются способы «почти точного» вычисления ортометрической высоты, что связано напрямую с увеличением знаний о строении верхних слоев земной коры, несмотря на то что в статье (Vaniček et al., 2012) указано на значительную составляющую ортометрической высоты, связанную со строением земной коры и распределением масс в ней. Поскольку основная функция системы высот — это решение прикладной задачи обработки данных высокоточного нивелирования, можно было бы не обращать внимания на мелкие отличия в высотах, возрастающие очень медленно и не превосходящие по разным оценкам 1–1.5 м. С определением ортометрической высоты связывают возможность точного определения геоида: разные, часто повторяющиеся аспекты этого вопроса рассмотрены авторами более 50 научных работ (Tenzer et al., 2003). В других публикациях нормальную систему высот ставят под сомнение, попутно утверждая, что геоид и ортометрическая высота могут быть определены с точностью до сантиметра (Foroughi et al., 2017). Авторы (Vaniček et al., 2012) идут еще дальше, утверждая, что применение метода Стокса – Гельмерта, а также современные подробные знания о распределении масс земной коры позволят определить высоту геоида с такой же точностью, что и высоту квазигеоида (аномалию высоты). В (Patroba, Yoichi, 2015) предпринята попытка строго вычислить ортометрические высоты на 816 GPS-станциях, распределенных на 4 японских островах. Неудивительно, что при таком потоке новой информации теряется возможность сопоставить различные точки зрения и проверить корректность выводов. В этом и есть упущение российских специалистов, считавших вопрос давно закрытым и потому молчавших последние десятилетия.

Прежде всего, перед сравнением выясним основные неустранимые недостатки ортометрической системы высот:

1. Невозможно практически точно вычислить длину отрезка реальной силовой линии от геоида до точки земной поверхности, что в первую очередь связано с незнанием распределения масс.

2. Следует отметить, что даже если распределение масс известно, возникают трудности с вычислением объемных интегралов для каждого репера, в пределе интегрирование должно проводиться по всему объему планеты для каждого репера и каждого малого участка реальной силовой линии. Существует способ приближенного решения, но практически нельзя оценить его окончательную точность.

3. Разность ортометрических высот по определению практически равна разности геодезических высот — «вертикальной длины» нормали к эллипсоиду, что не отражает поведение гравитационного поля с высотой.

Даже если все эти трудности преодолены, то и в этом случае нормальная высота имеет ряд преимуществ перед ортометрической. При этом недостатки ортометрической высоты становятся преимуществами нормальной высоты:

1. Нормальные высоты вычисляются принципиально строго (они однозначно связаны с динамическими высотами, имеющими узкую область применения на одной уровенной поверхности).

2. При обработке данных высокоточного нивелирования существенно уменьшаются невязки в нивелирных полигонах (в пределе до нуля), при этом требования к знанию реального поля вдоль линии нивелирования достаточно низкие. Существует возможность вычисления поправки за переход от измеренных превышений к разностям нормальных высот даже по модели внешнего гравитационного поля, аналитически продолженной до земной поверхности.

3. Уровенные поверхности, пересекающие физическую поверхность Земли, в районе работ более важны для практики, чем геоид, поскольку при геодезических измерениях приходится иметь дело именно с ними. Их высота над поверхностью теллуроида дает высоту квазигеоида (аномалию высоты), связанную с нормальной и геодезической высотой.

Как уровенная поверхность с потенциалом W_0 геоид относится к существующим в природе элементам реального поля (Огородова, 2013), но поскольку он выбирается исходя из близости (в геометрическом или физическом смысле) к поверхности океана, на подавляющей территории суши трудно наблюдать геоид. Тем не менее, принципиальная невозможность отыскания геоида на суше — также одно из частых заблуждений сторонников теории Молоденского, поскольку можно указать несколько вариантов практического отыскания геоида (Попадьев, Рахмонов, 2022; Popadyev, Rakhmonov, 2022), представленных на рис. 1:

— с использованием скважинного гравиметра в вертикальной шахте (вертикальное геометрическое нивелирование), при этом отсчеты силы тяжести и глубины опускания берутся до тех пор, пока их сумма не сравняется с геопотенциальным числом в точке вычисления; этот вариант указан еще Молоденским;

— геометрическое нивелирование по склонам карьера, где разность потенциалов накапливается обычным методом; этот вариант можно реализовать, извлекая грунт вплоть до отметки W_0, наблюдаемой на берегу океана;

— строго горизонтальная шахта от берега или футштока, где нивелирование выполняется по поверхности геоида с постоянным нулевым приращением потенциала путем проведения горизонтальной штольни от берега океана, пол которой вынесен с нулевым превышением; из всех представленных вариантов этот вариант наиболее трудный для реализации.

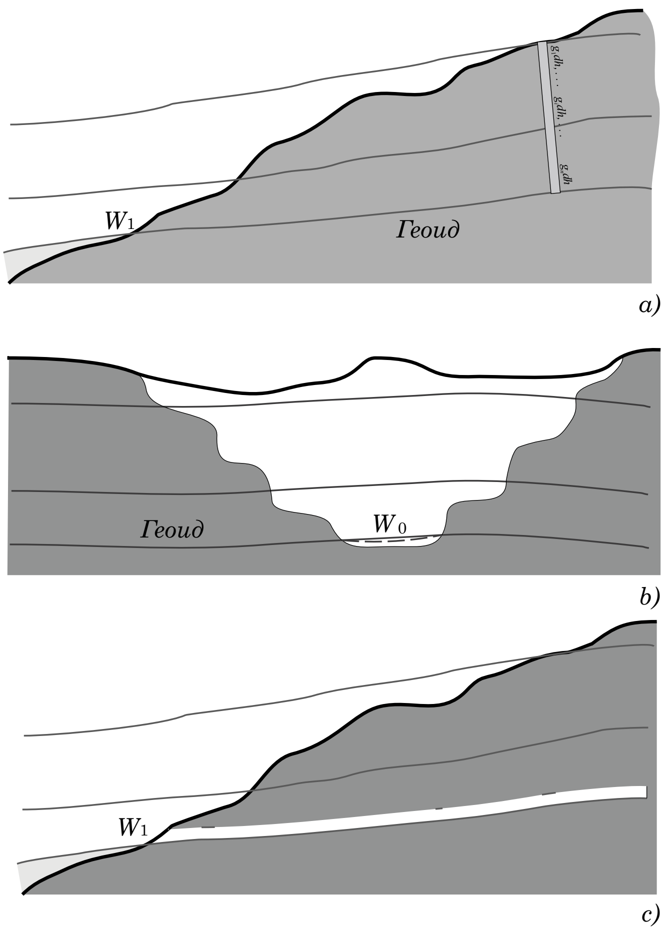

Рис. 1. Практические способы отыскания геоида: *a)* с использованием скважинного гравиметра в вертикальной шахте; *b)* геометрическое нивелирование в глубь карьера; *c)* строго горизонтальная шахта от берега или футштока

Авторам статьи неизвестны попытки практической реализации хотя бы одного метода отыскания реального геоида (но этого нельзя исключать в будущем). Дальнейшие рассуждения будут связаны с предположением, что все указанные принципиальные трудности определения ортометрических высот устранены, и мы оперируем только с их точными значениями.

Определение нормальной высоты как длины координатной линии сфероидальной системы координат

При рассмотрении (асимптотических) свойств нормальной и ортометрической высот можно убедиться в том, что на достаточно большом удалении от земной поверхности (10 000–20 000 км) различия между уровенными поверхностями реального и нормального поля становятся неотличимы. При удалении от Земли на одной и той же уровенной поверхности реального поля нормальные высоты будут меняться плавнее и медленнее, ортометрические же будут меняться резче, поскольку по определению они отсчитываются от поверхности геоида, «фиксированного» вблизи земной поверхности. На рис. 2 синим цветом показаны преувеличенные в масштабе «волны» геоида, вследствие чего ортометрические высоты H^g точек на удаленных достаточно гладких уровенных поверхностях реального поля будут содержать дополнительную часть ΔH^g. Хотя уровенные поверхности реального и нормального полей сливаются, длины соответствующих силовых линий будут отличаться на величину ΔH^g, так что на достаточно удаленной уровенной поверхности две близкие точки, имеющие одно геопотенциальное число, будут иметь практически одну нормальную высоту (показана на рис. 2 зеленым отрезком), но их ортометрические высоты будут разниться существенее. Это связано с тем, что при удалении от аномальных масс соответствующая высота квазигеоида (аномалия высоты) стремится к нулю вместе с аномальным потенциалом, а нормальная высота асимптотически стремится к отрезку силовой линии нормального поля от эллипсоида до точки. Высота геоида же не меняется.

В меньшей степени эта ситуация проявляется и вблизи земной поверхности, что позволяет сделать вывод о том, что теоретически нормальные высоты **в среднем** являются более подходящими к неоднородному гравитационному полю, чем ортометрические. Тем не менее, и у системы нормальных высот есть теоретические трудности, о чем будет сказано ниже.

В существующей специальной литературе (Еремеев, Юркина, 1972) имеются разные трактовки, лежащие в определении нормальной высоты, в зависимости от направления кривой, по которой вычисляется отрезок. Криволинейный интеграл,

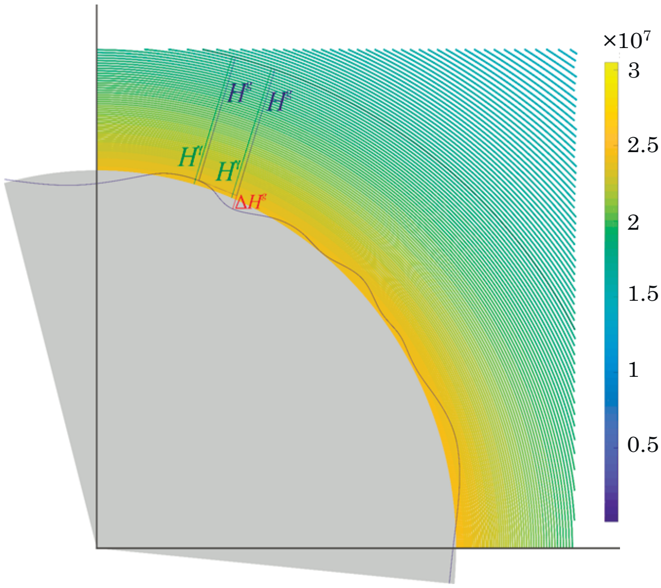

Рис. 2. Поведение ортометрической высоты на большом удалении от Земли (серая заливка); на цветной шкале показано сечение уровенных поверхностей потенциала силы тяжести, проведенных с шагом 100 000 м²/с²

соответствующий нормальной высоте, можно вычислять вдоль трех направлений (рис. 3): по нормали к поверхности эллипсоида, по силовой линии нормального поля силы тяжести, вдоль координатной линии сфероидальной системы координат (Попадьев, Рахмонов, 2022; Popadyev, Rakhmonov, 2023).

Геометрическое определение нормальной высоты как длины отрезка нормали к эллипсоиду (H на рис. 3) не имеет какого-то особого физического смысла; если в качестве опорного направления взять нормальную силовую линию (γ на рис. 3), то такой способ определения нормальной высоты максимально приближается к определению ортометрической высоты (только названия реального поля заменяются на названия элементов нормального поля). Определение нормальной высоты как длины отрезка силовой линии нормального поля также не лишено недостатков: у двух близких точек одной уровенной поверхности, сильно удаленной от планеты, могут быть существенно разные длины силовых линий (рис. 4). Применение силовой линии неудобно и с точки зрения асимптотических свойств нормальной высоты на еще более существенном удалении от притягивающего тела, где градиент поля силы тяжести меняет знак. Эти недостатки отсутствуют у способа вычисления нормальной высоты как длины координатной линии в сфероидальной системе координат (γ на рис. 3), хотя в этом случае в физическое понятия, бескоординатное по своей природе, опять же включается элемент какой-то координатной системы. Для обеспечения всех практических потребностей наземной геодезии, а также для использования в задачах теории фигуры Земли

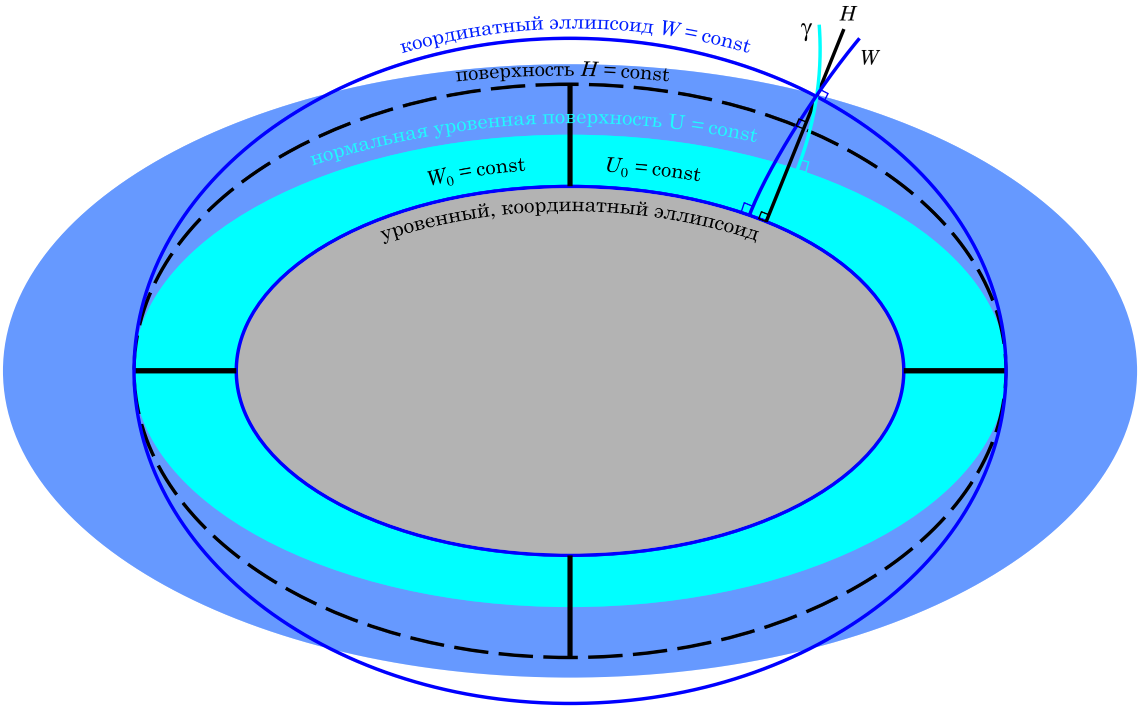

Рис. 3. Направления, используемые в нормальной системе высот: H — нормаль к уровенному эллипсоиду, γ — силовая линия нормального поля, w — координатная линия сфероидальной системы координат

необходимы высокоточные вычисления нормальной высоты и при этом нужны выражения, обеспечивающие запас точности по крайней мере на один порядок выше, чем 0.1 мм (существующее численное разрешение при обработке высокоточного нивелирования).

В публикации (Юркина, 2004) М. И. Юркина предложила следующий способ вычисления нормальной высоты как длины координатной линии сфероидальной системы u, b, L:

$$
\begin{aligned}
H^{\gamma} = (b' - b_0)\Bigg[1 &- \frac{1}{2}\frac{c^2}{b' b_0} + \frac{1}{2}\frac{c^2 \sin^2 u}{b' b_0} + \frac{1}{8}\frac{c^4 B_3}{b'^3 b_0^3} - \\
&- \frac{1}{12}\frac{c^4 B^3}{b'^3 b_0^3}\sin^2 + \frac{1}{24}\frac{c^4 B_3}{b'^3 b_0^3}\sin^4 u - \\
&- \frac{c^6}{16}\frac{B_5}{b'^5 b_0^5} + \frac{3}{80}c^6 \sin^2 u \frac{B_5}{b'^5 b_0^5} + \\
&+ \frac{1}{80}c^6 \sin^4 u \frac{B_5}{b'^5 b_0^5} + \frac{c^6}{80}\sin^6 u \frac{B_5}{b'^5 b_0^5} \dots\Bigg],
\end{aligned}
\tag{1}
$$

где геодезическая долгота L в выражениях не присутствует, другие обозначения:

$$
B_3 = b'^2 + b' b_0 + b_0'^2,
$$
$$
B_5 = b'^4 + b'^3 b_0 + b' b_0^3 + b_0^4.
$$

Под сфероидальной системой понимается семейство координатных эллипсоидов, софокусных отсчётному эллипсоиду с полуосями a_0, b_0, на поверхности которых постоянна третья координата w. При этом у всех координатных эллипсоидов постоянна половина расстояния между фокусами:

$$
c = \sqrt{a^2 - b^2} = \mathrm{const},
$$

также первой координатой служит приведенная широта u, обобщенная на случай произвольных точек вне отсчетного эллипсоида, а вторая координата — долгота. Аналогом третьей координаты w может служить малая полуось b текущего координатного эллипсоида.

К сожалению, при выводе этих выражений ошибочное отбрасывание членов значимого порядка в разложении арккотангенса в ряд Маклорена снизило точность выражения, и рабочие формулы М. И. Юркиной были исправлены и приведены к виду:

$$
\begin{aligned}
H^{\gamma} = \Bigg[(b) &- \frac{1}{2}c^2 \cos^2 u \left(\frac{1}{c}\operatorname{arctg}\frac{b}{c}\right) - \\
&- \frac{1}{8}c^4 \cos^4 u \left(\frac{b}{2c^2(b^2+c^2)^2} + \right. \\
&\left. + \frac{1}{2c^3}\operatorname{arctg}\frac{b}{c}\right) - \\
&- \frac{1}{16}c^6 \cos^6 u \left(\frac{b}{4c^2(b^2+c^2)^2} + \right. \\
&+ \frac{3b}{8c^4(b^2+c^2)} + \frac{3b}{8c^4(b^2+c^2)} + \\
&\left. + \frac{3}{8c^5}\operatorname{arctg}\frac{b}{c}\right) - \\
&- \frac{5}{128}c^8 \cos^8 u \left(\frac{b}{6c^2(b^2+c^2)^3} + \right. \\
&+ \frac{5}{24}\frac{b}{c^4(b^2+c^2)^2} + \frac{5}{16}\frac{b}{c^4(b^2+c^2)^2} + \\
&\left. + \frac{5}{16c^7}\operatorname{arctg}\frac{b}{c}\right) - \cdots\Bigg]_{b_0}^{b'}
\end{aligned}
\tag{2}
$$

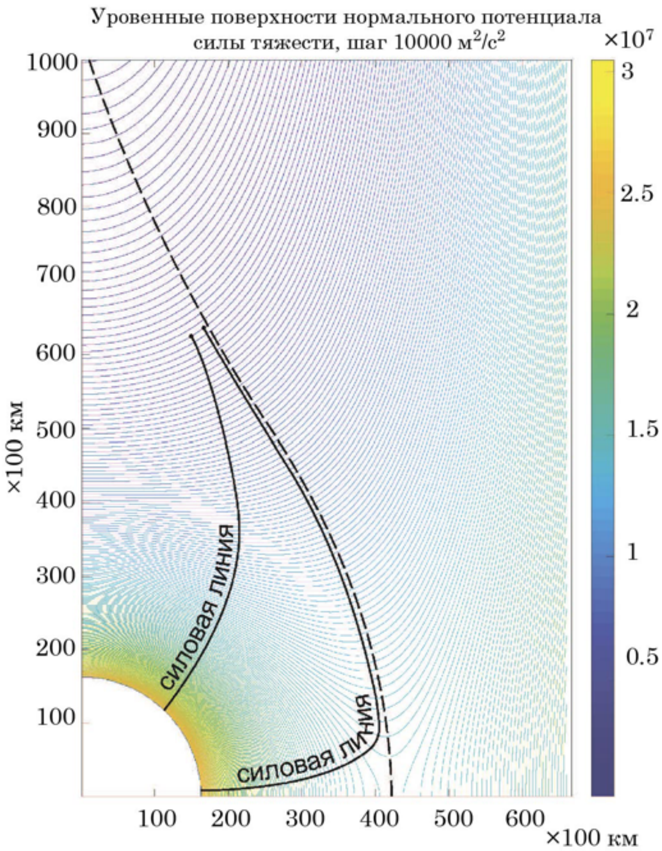

Рис. 4. Недостаток определения нормальной высоты как длины силовой линии. Пунктиром показана силовая линия, проходящая через точку разрыва непрерывности потенциала силы тяжести

Нормальная высота H^γ как длина отрезка координатной линии w сфероидальной системы координат есть следующий криволинейный интеграл 1-го рода:

$$H^\gamma = \int_{w_0}^{w'} c\sqrt{\operatorname{ch}^2 w - \cos^2 u}\, dw,$$

что после преобразований, представленных в (Попадьев, Рахмонов, 2022), можно представить в виде:

$$H^\gamma = c\left(H_0 \int_{w_0}^{w'} dw + H_1 \int_{w_0}^{w'} \operatorname{ch} w\, dw + \right.$$
$$\left. + H_2 \int_{w_0}^{w'} \operatorname{ch}^2 w\, dw + H_3 \int_{w_0}^{w'} \operatorname{ch}^3 w\, dw + \cdots \right) \quad (3)$$

,

где коэффициенты:

$$H_0 = \sqrt{\operatorname{ch}^2 w_0 - \cos^2 u} - \frac{\operatorname{ch}^2 w_0}{(\operatorname{ch}^2 w_0 - \cos^2 u)^{\frac{1}{2}}} -$$
$$-\frac{1}{2}\frac{\operatorname{ch}^2 w_0 \cos^2 u}{(\operatorname{ch}^2 w_0 - \cos^2 u)^{3/2}} - \frac{1}{2}\frac{\operatorname{ch}^4 w_0 \cos^2 u}{(\operatorname{ch}^2 w_0 - \cos^2 u)^{5/2}} - \ldots,$$

$$H_1 = \frac{\operatorname{ch} w_0}{(\operatorname{ch}^2 w_0 - \cos^2 u)^{\frac{1}{2}}} + \frac{\operatorname{ch} w_0 \cos^2 u}{(\operatorname{ch}^2 w_0 - \cos^2 u)^{\frac{3}{2}}} +$$
$$+ \frac{3}{2}\frac{\operatorname{ch}^3 w_0 \cos^2 u}{(\operatorname{ch}^2 w_0 - \cos^2 u)^{5/2}} + \cdots,$$

$$H_2 = -\frac{1}{2}\frac{\cos^2 u}{(\operatorname{ch}^2 w_0 - \cos^2 u)^{\frac{3}{2}}} - \frac{3}{2}\frac{\operatorname{ch}^2 w_0 \cos^2 u}{(\operatorname{ch}^2 w_0 - \cos^2 u)^{\frac{5}{2}}} -$$
$$- \cdots,$$

$$H_3 = \frac{1}{2}\frac{\operatorname{ch} w_0 \cos^2 u}{(\operatorname{ch}^2 w_0 - \cos^2 u)^{5/2}} + \cdots$$

и последующие вычисляются с любой точностью по координатам точки на эллипсоиде u, v, w_0, где выполнено разложение.

Здесь следует использовать табличные интегралы: $\int \operatorname{ch}^2 w\, dw = \frac{\operatorname{sh} 2w}{2} + \frac{1}{2}w$, $\int \operatorname{ch}^3 w\, dw = \frac{\operatorname{sh}^3 w}{3} + \operatorname{sh} w$ и др.

Сам алгоритм высокоточного вычисления нормальной высоты может быть реализован на современных ПК и состоит из трех основных шагов:

1. Вычисление нормальной высоты в первом приближении по рабочей формуле и соответствующего приближенного значения третьей сфероидальной координаты w' или b'.

2. Уточнение третьей сфероидальной координаты w' или b' точек, расположенных на теллуроиде из условия Молоденского о равенстве разности нормального потенциала и реального геопотенциального числа.

3. Вычисление криволинейного интеграла в пределах от w_0 до w' в соответствии с (3).

Контрольные вычисления, выполненные по этому алгоритму, показывают следующую абсолютную ошибку в разности потенциала на втором шаге:

на высоте 10 км: от $2 \cdot 10^{-5}$ м²/с² на экваторе до $2 \cdot 10^{-6}$ м²/с² на полюсе;

на высоте 50 км: от 0.0015 м²/с² на экваторе до $2 \cdot 10^{-6}$ м²/с² на полюсе;

на высоте 100 км: от 0.019 м²/с² на экваторе до $7 \cdot 10^{-6}$ м²/с² на полюсе.

Заключение

Новые представления о месте ортометрических и нормальных высот в современной физической геодезии позволяют определить преимущества и недостатки ортометрической и нормальной систем высот, а также обсудить варианты нормальных высот с различных позиций. Удобство применения нормальных высот для практических и теоретических задач обосновано независимо от теории Молоденского и не связано с решением геодезической краевой задачи по определению аномального потенциала.

Определение нормальной высоты как длины координатной линии сфероидальной системы координат более обосновано, чем представление о нормальной высоте, как длине отрезка силовой линии нормального поля. Вычисление нормальной высоты как длины силовой линии нормального поля не имеет преимуществ перед вычислением нормальной высоты как длины отрезка координатной линии сфероидальной системы.

Новое выражение для высокоточного вычисления нормальной высоты имеет высокую точность на больших расстояниях от Земли, где гравитационное поле стремится к сферической структуре вместе с координатными линиями сфероидальной системы. В земных условиях на высотах до 8 км точность вычисления нормальной высоты достигает 0.001 мм.

Литература

Демьянов Г. В., Майоров А. Н., Юркина М. И. Построение общеземной системы нормальных высот // Геодезия и картография. 2009. № 1. С. 12–16.

Еремеев В. Ф. Теория ортометрических, динамических нормальных высот // Труды ЦНИИГАиК. 1951. Вып. 86.

Еремеев В. Ф., Юркина М. И. Теория высот в гравитационном поле Земли. М.: Недра, 1972. 145 с.

Огородова Л. В. Основы теории потенциала. Гравитационное поле Земли, Луны и планет. М.: Изд-во МИИГАиК, 2013. 107 с.

Попадьев В. В. О преимуществе системы нормальных высот // Геодезия и картография. 2018. Т. 79, № 9. С. 2–9. DOI: 10.22389/0016-7126-2018-939-9-2-9.

Попадьев В. В., Рахмонов С. С. Способ высокоточного вычисления нормальной высоты как длины координатной линии на произвольных расстояниях от Земли // Геодезия и картография. 2022. Т. 83, № 11. С. 12–20. DOI: 10.22389/0016-7126-2022-989-11-12-20.

Юркина М. И. Вопросы счета высот в зарубежных публикациях // Геодезия и картография. 1996. № 2. С. 55–57.

Юркина М. И. Чтобы уточнить высоту до долей миллиметра // Геодезистъ. 2004. № 2. С. 19–20.

Foroughi I., Van'ĭček P., Sheng M. et al. In defense of the classical height system // Geoph. J. Int. 2017. no. 211(2). P. 1154–1161. DOI: 10.1093/gji/ggx366.

Patroba A. O., Yoichi F. Comparison of Helmert and rigorous orthometric heights over Japan // Earth, Planets and Space. 2015. no. 67, Article number 27. P. 1–9. DOI: 10.1186/s40623-015-0194-2.

Popadyev V., Rakhmonov S. Some remarks about orthometric and normal height systems // EGU General Assembly 2022. Vienna, Austria, 23–27 May, 2022. EGU22-10246. URL: https://doi.org/10.5194/egusphere-egu22-10246 (дата обращения: 05.02.2024).

Popadyev V., Rakhmonov S. High-precision calculating the normal height as the coordinate line's length, EGU General Assembly 2023, Vienna, Austria, 24–28 Apr, 2023. EGU23-3334. URL: https://doi.org/10.5194/egusphere-egu23-3334 (дата обращения: 05.02.2024).

Tenzer R., Novák P., Janák J. et al. A review of the UNB approach for precise geoid determination based on the Stokes-Helmert method. In: Honoring the academic life of P. Vanicek / ed. by Santos Marcelo. Tech. Rep. No. 218. Department of Geodesy and Geomatics Engineering, University of New Brunswick: Canada, 2003. P. 132–176.

Vaniček P., Kingdon R., Santos M. Geoid versus quasigeoid: a case of physics versus geometry // Contributions to Geophysics and Geodesy. 2012. no. 42(1). P. 101–118.