

## Определение азимута по радионаблюдениям геостационарных ИСЗ

© Д. А. Трофимов<sup>1</sup>, С. Д. Петров<sup>1</sup>, И. В. Чекунов<sup>2</sup>

<sup>1</sup>СПбГУ, г. Санкт-Петербург, Россия

<sup>2</sup>МГТУ им. Н. Э. Баумана, г. Москва, Россия

### Реферат

Работа посвящена проблеме оперативного определения азимута с точностью 1' методом радиоинтерферометрических наблюдений геостационарных спутников Земли для выставки инерциальных навигационных систем. Использование радиоинтерферометрических наблюдений позволит добиться полной метеонезависимости определения азимута. Рассмотрены применяющиеся сейчас методы определения азимута, такие как высокоточная спутниковая навигация, астрономические наблюдения, геодезические и гиротеодолитные измерения. Используемые в настоящее время астрономические, геодезические и гиротеодолитные методы определения азимута имеют недостатки, которые не позволяют обеспечить предъявляемые требования.

Для решения данной проблемы авторами предложено проводить радиоинтерферометрические наблюдения геостационарных спутников Земли с целью определения азимута. Геостационарные спутники Земли, как правило, являются спутниками связи или телевидения, вследствие чего являются яркими источниками радиоизлучения на небе, и подавить их сигнал гораздо сложнее, чем сигнал ГНСС. Их количество велико (несколько сотен), поэтому с наведением на них не должно возникнуть проблем. Широкое распространение технологий спутниковой связи и телевидения позволит использовать при создании наблюдательной аппаратуры уже апробированные технологические решения.

Предварительные расчеты показывают, что получение азимутальной информации с заданной точностью и необходимой оперативностью возможно. Отработаны два способа определения азимута: в условиях известной и неизвестной базы интерферометра. Показано, что метод с известной базой является более быстрым и надежным, без проблем, возникающих в случае применения метода с неизвестной базой. В работе рассмотрены сложности данных методов и предложены перспективы дальнейшего развития.

**Ключевые слова:** радиоинтерферометрия, определение азимута, геостационарные спутники.

*Контакты для связи:* Трофимов Дмитрий Александрович ([d.trofimov@spbu.ru](mailto:d.trofimov@spbu.ru)).

**Для цитирования:** Трофимов Д. А., Петров С. Д., Чекунов И. В. Определение азимута по радионаблюдениям геостационарных ИСЗ // Труды ИПА РАН. 2023. Вып. 66. С. 45–52.

<https://doi.org/10.32876/ApplAstron.66.45-52>

## Determination of Azimuth from Radio Observations of Geostationary Satellites

D. A. Trofimov<sup>1</sup>, S. D. Petrov<sup>1</sup>, I. V. Chekunov<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Saint-Petersburg State University, Saint-Petersburg, Russia

<sup>2</sup>Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

### Abstract

The work is devoted to the problem of the operational determination of the azimuth regardless of the meteorological conditions for the adjustment of inertial navigation systems. The requirements for determining the azimuth for this task are 1' in accuracy. The current methods of determining the azimuth, such as high-precision satellite navigation, astronomical observations, geodetic and gyrotheodolite measurements, are considered. The currently used methods for determining azimuth, astronomical, geodetic and gyrotheodolite have drawbacks that do not allow them to meet the requirements.

In order to solve this problem we propose to carry out radio interferometric observations of geostationary satellites of the Earth in order to determine the azimuth. Geostationary satellites, as a rule, are communication or television satellites, thus there are bright sources of radio emission in the sky and their signal is much more difficult to suppress than the signal of global navigation satellite systems. Their number is large (several hundred), they can be considered stationary on the celestial sphere, so there should be no problems with pointing at them. The widespread use of satellite communications and television technologies will make it possible to use already tested technological solutions in the creation of observational equipment.

Preliminary calculations show that it is possible to obtain azimuthal information with a given accuracy and required efficiency. Two methods of determining the azimuth have been worked out, in the conditions of the known and unknown base of the interferometer. It is shown that the method with a known base is faster and more reliable, does not have some of the problems that are inherent in the method with an unknown base. Problems of these methods are considered, development prospects are proposed.

**Keywords:** radiointerferometry, azimuth adjustment, geostationary satellite.

*Contacts:* Dmitrii A. Trofimov ([d.trofimov@spbu.ru](mailto:d.trofimov@spbu.ru)).

**For citation:** Trofimov D. A., Petrov S. D., Chekunov I. V. Determination of azimuth from radio observations of geostationary satellites // Transactions of IAA RAS. 2023. Vol. 66. P. 45–52.  
<https://doi.org/10.32876/AplAstron.66.45-52>

## Введение

В настоящее время, несмотря на развитие методов высокоточной спутниковой навигации, которые во многом вытеснили иные методы практической астрономии, применявшиеся ранее для решения различных задач по определению координат на поверхности Земли, определение азимута остается достаточно сложной задачей, в которой методы ГНСС применимы не всегда. Азимут направления с какой-либо точки задает нам направление меридиана места, проходящего через эту самую точку, направление север — юг и, таким образом, местную систему координат, что чрезвычайно важно для многих практических приложений. Примером подобных практических приложений является выставка (задание первоначальной ориентации) инерциальных навигационных систем (ИНС). Системы инерциальной навигации (или ИНС) — устройства, которые на основе гироскопов и акселерометров выполняют определения положения, скорости и направления движения для перемещающегося объекта без использования внешних ориентиров. ИНС играют следующую роль: имея меньшую точность, чем ГНСС, они обладают другим важнейшим качеством — автономностью. То есть они будут работать в условиях отсутствия навигационного сигнала, который может быть заглушен, подменен, навигационные космические аппараты могут быть повреждены или уничтожены, таким образом, для определенной категории потребителей ИНС исключительно важны. Для них необходим уровень точности определения азимута в 1'.

Определение азимута методами ГНСС в настоящее время выполняется следующим образом. На двух пунктах производятся ГНСС-измерения приемниками геодезического класса. Далее задача разделяется на два этапа. Сначала определяются точные координаты обоих пунктов, затем решается обратная геодезическая задача, когда по известным координатам определяется азимут направления с одной точки на другую. Однако данный способ имеет различные недостатки, основной из которых — низкая оперативность. Для получения высокоточных координат на основе выполненных ГНСС-наблюдений необходимо либо произвести обработку в дифференциальном режиме (то есть в окрестности места, где производятся наши наблюдения, должна быть базовая ГНСС-станция); либо произвести обработку методом PPP (Precise Point Positioning), для чего необходим

доступ к высокоточным эфемеридам навигационных космических аппаратов (НКА), окончательные и самые точные версии которых доступны спустя 7–10 суток после наблюдений. Все это реализуемо при наличии возможности проведения ГНСС-наблюдений.

Классические методы определения азимута предмета или направления на местности можно разделить на три группы. Первая группа — астрономические — методы практической астрономии (Руководство по астрономическим определениям, 1984; Zhan et al., 2016). Точность данных методов самая высокая и составляет 0.7", при этом не требуется предварительная фиксация системы координат на поверхности. С использованием специально созданных астрономических инструментов нового поколения, с автоматическим считыванием показаний с отсчетных кругов и фиксации моментов прохождения светила по сетке нитей инструмента, можно существенно увеличить скорость получения результата, который в классическом варианте составлял часы или десятки минут. Однако астрономические методы предполагают наблюдения небесных светил в оптическом диапазоне, таким образом, эти методы сильно метеозависимы. Невозможно определение азимута в условиях, когда не видны светила.

Второй группой можно считать геодезические методы (Геодезические работы, 1980). Эти методы предполагают определение азимута на основе угломерных измерений исходных геодезических пунктов с уже известными координатами. Таким образом, их использование возможно только на заранее подготовленных территориях, на которых закреплены геодезические пункты, координаты геодезических пунктов измерены, так же промерены азимуты с пункта на пункт. Подготовка подобного полигона отличается трудоемкостью. Геодезические методы определения азимута достаточно точны, сопоставимы по точности с астрономическими, слабо зависят от метеорологических условий (требуется видимость геодезических пунктов). Но главная трудность при использовании данных методов — необходимость создания промеренного геодезического полигона.

Третьей группой рассматриваемых методов являются гироскопические (Ашимов, Воронков, 1973; Гироскопическое ориентирование, 1979; Bezdiček, 2018). Гироскопические методы слабо зависят от метеорологических условий (требуется только прямая видимость ориентиров) и позволя-

ют получить азимут со стандартным отклонением порядка  $2''$  в результате нескольких часов наблюдений при условии, что расстояние от точки калибровки гироскопа не превышает 200–300 км. Однако необходимо отметить, что в высоких широтах, когда ось вращения Земли и вектор силы тяжести близки, точность метода снижается. Кроме того, требование о близости к пунктам поверки не всегда выполнимо.

Видно, что все классические методы позволяют получить азимут с высокой точностью, однако основные проблемы заключаются в зависимости от метеорологических условий и большого количества времени, необходимого для получения требуемой точности. Таким образом, существует потребность в разработке метода определения азимута, который будет всепогодным, оперативным и не зависящим от заранее подготовленных полигонов.

### Радиоинтерферометрическое определение азимута

В качестве решения существующей проблемы нами предложен метод радиоинтерферометрического определения азимута по искусственным радиоисточникам. В качестве таких радиоисточников мы предлагаем использовать геостационарные спутники, прежде всего спутники связи.

Предлагаемый метод аналогичен радиоастрономическим наблюдениям в РСДБ-сетях, однако предполагается использование легких антенн, аналогичных антеннам спутникового телевидения, кроме того, характерные линейные масштабы баз интерферометра предполагаются небольшими (в пределах нескольких километров,  $\sim 1000$  м), предлагаемые радиоисточники намного мощнее наблюдаемых в РСДБ-сетях внегалактических радиоисточников, что существенно упрощает задачу. Наблюдения производятся на двух антеннах, основными измеряемыми величинами являются задержка сигнала  $\tau$  и частота интерференции  $\frac{\partial \tau}{\partial t}$ .

В условиях известной длины базы интерферометра задержка сигнала  $\tau$  определяет угол между базой интерферометра и направлением на радиоисточник, что позволяет определить азимут базы при известном азимуте геостационарного спутника. На предполагаемых длинах баз интерферометра точное определение их значений возможно с использованием квантовых дальномеров или геодезическими методами с помощью теодолитов.

Геостационарные спутники, прежде всего спутники связи, обладают рядом преимуществ, как опорные ориентиры для определения азимута. Они являются яркими радиоисточниками на небесной сфере, подавление сигнала которых гораздо менее вероятно в силу того, что они оснащены мощными направленными передатчиками. Геостационарные спутники находятся на геоста-

ционарной орбите в экваториальной плоскости на точках стояния (или орбитальных позициях). Перемещения работающих спутников относительно точек стояния невелики, наблюдательный комплекс не будет нуждаться в сложных системах наведения и слежения. Их достаточно много, в настоящее время около 500, таким образом, практически из любой точки Земли, за исключением околополярных областей, где геостационарные спутники не видны, можно наблюдать большое (до нескольких десятков) количество таких ИСЗ. Нахождение спутника на геостационарной орбите снижает вероятность его поражения методом физического воздействия, для спутников ГНСС эта вероятность выше, хотя и она в целом остается пока малой. Кроме того, количество операторов геостационарных спутников велико, они принадлежат большому количеству организаций в разных государствах и обеспечивают значительную часть спутниковой связи, на основании чего мы делаем вывод о малой вероятности их одновременного отключения владельцами. Наблюдения будут производиться в радиодиапазоне, следовательно, метод не зависит от времени суток и метеоусловий.

Мощность передатчиков телекоммуникационных геостационарных ИСЗ позволит получить малое время накопления сигнала, в пределах нескольких секунд, не более десятков секунд. Габариты антенн спутникового телевидения позволят произвести быстрое наведение нашего комплекса на другой ИСЗ. В целом общее время наблюдений, необходимых для определения азимута, можно предварительно оценить в 1–2 мин.

Основные рабочие диапазоны геостационарных спутников:

- L-диапазон (1–2 ГГц);
- S-диапазон (3.4–7 ГГц);
- Ku-диапазон (10.7–18.0 ГГц);
- Ka-диапазона (26.5–40 ГГц).

### Методы определения азимута

Можно предложить два метода определения азимута из радиоинтерферометрических наблюдений.

В первом методе определение азимута производится в предположении, что у нас известны только геоцентрические координаты наблюдаемых геостационарных ИСЗ и геоцентрические координаты одной из антенн. В этих условиях мы можем определить расстояние между антенной с известными координатами и геостационарным спутником, и, измерив временную задержку сигнала  $\tau$  между моментами прихода сигнала на первую и вторую антенны радиоинтерферометра, мы можем определить расстояние  $D$  между антенной с неизвестными координатами и геостационарным спутником.

$$D = \sqrt{(x_g - x_1)^2 + (y_g - y_1)^2 + (z_g - z_1)^2} - c\tau,$$

где  $(x_g, y_g, z_g)$  — координаты геостационарного спутника,  $(x_1, y_1, z_1)$  — известные координаты первой антенны. В то же время:

$$\sqrt{(x_g - x_2)^2 + (y_g - y_2)^2 + (z_g - z_2)^2} = D,$$

где  $(x_2, y_2, z_2)$  — неизвестные координаты второй антенны.

Таким образом, в условиях, когда известны только координаты одной из антенн и координаты спутника, знание временной задержки сигнала  $\tau$  дает нам радиус сферы с центром в геостационарном спутнике (точнее, в фазовом центре излучателя), на которой находится фазовый центр второй антенны (с неизвестными координатами). В этих условиях мы не можем извлечь из задержки никакой угловой информации и решение задачи разделяется на два этапа. На первом мы должны определить координаты второй антенны. Очевидно, что координаты антенны не могут быть определены по наблюдениям одного геостационарного ИСЗ, нам необходимо наблюдать минимум три геостационарных ИСЗ. В таком случае координаты второй антенны могут быть получены из решения системы уравнений:

$$\begin{cases} (x_{g1} - x_2)^2 + (y_{g1} - y_2)^2 + (z_{g1} - z_2)^2 = D_1^2 \\ (x_{g2} - x_2)^2 + (y_{g2} - y_2)^2 + (z_{g2} - z_2)^2 = D_2^2, \\ (x_{g3} - x_2)^2 + (y_{g3} - y_2)^2 + (z_{g3} - z_2)^2 = D_3^2 \end{cases}$$

где  $(x_{g1}, y_{g1}, z_{g1})$   $(x_{g2}, y_{g2}, z_{g2})$   $(x_{g3}, y_{g3}, z_{g3})$  — известные координаты геостационарных спутников,  $(x_2, y_2, z_2)$  — неизвестные координаты второй антенны. Решение данной системы уравнений дает нам две точки, одну из которых мы можем отбросить как ложную на основе имеющейся предварительной информации о положении второй антенны. Либо для получения точного решения нам надо наблюдать четыре спутника. На втором этапе, имея координаты первой и второй антенн, мы можем решить обратную геодезическую задачу каким-либо стандартным способом (Серрапинас, 2001).

Наши предварительные оценки показывают принципиальную работоспособность данного метода. Однако необходимо отметить следующие недостатки:

— во-первых, необходимо наблюдать не менее 3 спутников, а лучше 4.

— во-вторых, вследствие геометрического фактора (все спутники расположены в области экватора) с серьезными погрешностями определяется геоцентрическая координата  $z$  второй антенны. Для снижения данной погрешности до приемлемого уровня необходимо наблюдать геостационар-

ные ИСЗ, разнесенные по небу на максимальные угловые расстояния, что не всегда возможно. Также необходимо отметить, что данный метод по своей сути является полным аналогом дальномерных определений координат из ГНСС-измерений. Здесь можно усмотреть положительные стороны (наличие отработанных математических методов), но отрицательных больше. Точность полученных координат определяется точностью известных координат геостационарных ИСЗ. Однако геостационарные ИСЗ не являются навигационными аппаратами, постоянное определение их высокоточных координат не производится.

В качестве рабочего варианта мы предлагаем второй метод получения азимута из наблюдения геостационарных ИСЗ (см. рис. 1). Его особенностью является то, что мы непосредственно из задержки сигнала  $\tau$  можем получить угловую величину. Для его работы нам необходимо иметь данные о длине базы  $b$ . В таком случае мы можем установить следующее соотношение между задержкой сигнала  $\tau$  и углом  $\theta$  между базой радиоинтерферометра и направлением на геостационарный ИСЗ:

$$\cos \theta = \frac{2r_1 c \tau - c^2 \tau^2 + b^2}{2r_1 b}, \quad (1)$$

где  $c$  — скорость света,  $r_1$  — расстояние между геостационарным спутником и первой антенной, угол имеет вершину в антенне с известными координатами.

В данном случае алгоритм определения азимута будет выглядеть следующим образом.

На первом этапе необходимо определить горизонтальные координаты геостационарного спутника. Для начала определим координаты спутника в промежуточной системе координат с центром отсчета в антенне с известными координатами и осями, параллельными осям ITRF:

$$\begin{pmatrix} x^A \\ y^A \\ z^A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_g - x_1 \\ y_g - y_1 \\ z_g - z_1 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Перейдем в декартову систему координат, в которой ось  $z$  направлена в зенит, ось  $x$  направлена по меридиану на юг, ось  $y$  образует правую тройку векторов. Для этого необходимо выполнить два последовательных поворота, вокруг оси  $z$  на долготу  $\lambda$  и вокруг оси  $y$  на угол  $90 - \varphi$ , где  $\varphi$  — астрономическая широта места. Таким образом, декартовы координаты в данной системе координат будут выглядеть следующим образом:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \lambda \sin \varphi & -\sin \varphi \sin \lambda & \cos \varphi \\ -\sin \lambda & \cos \lambda & 0 \\ -\cos \varphi \cos \lambda & \cos \varphi \sin \lambda & \sin \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^A \\ y^A \\ z^A \end{pmatrix}. \quad (3)$$

В таком случае горизонтальные угловые координаты геостационарного спутника могут быть получены из следующих соотношений:

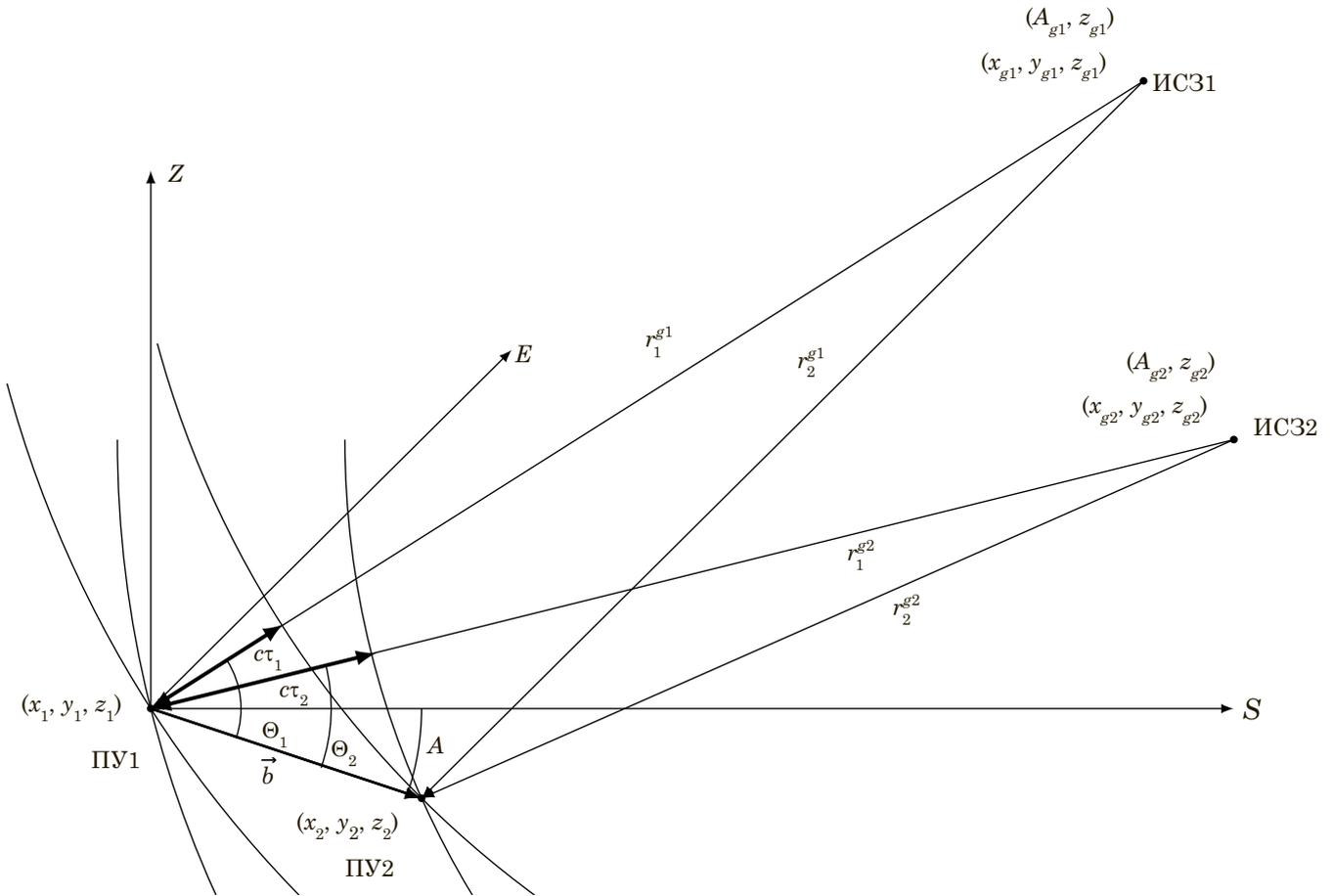


Рис. 1. Геометрические основы определения азимута при известной базе радиointерферометра

$$z = 90^\circ - \operatorname{arctg} \left( \frac{z'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} \right), \quad (4)$$

$$A = \operatorname{arctg} \left( \frac{-y'}{x'} \right), \quad (5)$$

где  $A$  — азимут,  $z$  — высота. Азимут в нашем случае астрономический, отсчитываемый от направления на юг через запад. Зная координаты  $x'$  и  $y'$  мы можем однозначно определить четверть, в которой находится азимут.

Определим требования по точности исходных данных для определения азимута с необходимой точностью. Очевидно, что наш метод заключается в определении углового расстояния между базой и геостационарным спутником, поэтому точность определенного азимута зависит от того, с какой точностью мы знаем азимут нашего ориентира (геостационарного ИСЗ) и точности определения угла  $\theta$  между базой радиointерферометра и направлением на геостационарный ИСЗ. Предположим, что погрешности определения данных параметров вносят равный вклад в итоговую погрешность определения азимута и тогда точность определения каждого из данных параметров составляет  $0.5'$ . В свою очередь, точность определения азимута геостационарного спутника зависит от точности координат

спутника и от точности знания координат наблюдательного пункта. Из соотношения (3) видно, что точность знания широты  $\varphi$  и долготы  $\lambda$  напрямую определяет точность итогового азимута геостационарного ИСЗ, так как широта и долгота являются аргументами матрицы поворота. Погрешность в определении геоцентрических координат геостационарного ИСЗ дает угол  $\Delta A \approx \frac{p}{r}$ , где,  $r$  — расстояние между геостационарным спутником и антенной, для случая высоких широт,  $\varphi > 60^\circ$ , мы можем принять характерный размер  $r = 40\,000\,000$  м,  $p$  — линейный размер смещения, вызванного неточностью определения координат геостационарного ИСЗ в проекции на плоскость, перпендикулярную оси зрения. Если принять равнозначный вклад погрешностей определения координат спутника и антенны в азимут спутника и принять погрешность каждого из эффектов в  $0.25'$ , то величину  $p = \Delta A r$  мы сможем определить в  $p = 15 \times \frac{40000000}{206265} \approx 3000$  м. Очевидно, что точность определения широты  $\varphi$  и, прежде всего, долготы  $\lambda$  не должна быть хуже  $0.25'$ . На широте  $\varphi = 60^\circ$  длина дуги параллели в  $0.25'$  составляет 230 м. Для широты  $\varphi = 75^\circ$ , максимальной, на которой возможно надежное наблюдение геоста-

ционарных ИСЗ, длина дуги параллели в  $0.25'$  составляет  $120$  м, для широты  $\varphi = 81^\circ$ , максимальной, для которой теоретически возможно наблюдение геостационарного ИСЗ, длина дуги параллели в  $0.25'$  составляет около  $73$  м, исходя из этого можно оценить необходимую точность знания координат антенны в  $100$  м, а необходимую точность координат геостационарного ИСЗ в  $\frac{P}{\sqrt{2}} = 2120$  м. Корректировка орбит геостационарных спутников производится с точностью до  $0.1^\circ$ , однако их эфемериды получаются с точностью лучше  $1000$  м.

Определим необходимые точности для определения параметров  $b$ ,  $r_1$  и  $\tau$ . На основе соотношения (1), взяв частные производные по всем этим параметрам и заменив дифференциалы конечными приращениями с учетом малости углов получим следующее соотношение для изменения угла  $\theta$  в зависимости от изменений  $b$ ,  $r_1$  и  $\tau$ :

$$\Delta\theta = \left( \frac{c^2\tau^2}{2r_1b^2} - \frac{c\tau}{b^2} + \frac{1}{2r_1} \right) \Delta b + \left( \frac{c^2\tau^2}{2r_1^2b} - \frac{1}{2r_1^2} \right) \Delta r_1 + \left( -\frac{c^2\tau}{r_1b} - \frac{c}{b} \right) \Delta\tau. \quad (6)$$

Определим характерные величины параметров  $b$ ,  $r_1$  и  $\tau$ . Длина базы  $b = 1000$  м, расстояние между антенной и геостационарным спутников  $r_1 = 40\,000\,000$  м, характерная измеряемая задержка  $\tau$  порядка  $2$  мкс. Отметим, что на величину допустимой погрешности  $\Delta r_1$  влияет также погрешность определения координат антенны и геостационарного ИСЗ. Для максимальной погрешности в определении координат в  $2120$  м, что в итоге может дать  $\Delta r_1 = 3000$  м, итоговая величина  $\Delta\theta_r$  при заданном размере базы и характерной величине задержка  $\tau$  составит менее  $1$  мксд, что многократно превышает наши требования по точности. Таким образом, основной вклад в погрешность определения углового расстояния  $\theta$  дадут погрешности определения длины базы  $b$  и задержки  $\tau$ . При условии равного их вклада в итоговую величину можно определить погрешность каждого из них в  $0.25'$ , что позволяет определить величину погрешности длины базы в  $\Delta b = 0.1$  м и погрешность определения задержки по результатам корреляционной обработки  $\Delta\tau$  в  $0.25$  нс. Шкалы времени наблюдательных пунктов должны быть синхронизированы между собой. Существующие в настоящее время стандарты времени и частоты мобильного класса (НАП КПН производства ВНИИФТРИ, LPFRS-01, VCH-210 производства Время-Ч) имеют нестабильность частоты порядка  $10^{-12}$ – $10^{-13}$ , что примерно на два порядка хуже стабильности стационарных стандартов частоты, обеспечивающих РСДБ-наблюдения с точностью регистрации задержки в единицы пикосекунд. На основании этого мы делаем вывод о возможности

создании необходимой нам системы частотно-временной синхронизации на базе мобильных стандартов частоты.

Из ограничений данного метода необходимо отметить широтную зависимость. На максимальной широте  $\varphi = 81^\circ$ , с которой теоретически возможна видимость геостационарного спутника, длина видимого сектора геостационарной орбиты составляет около  $30^\circ$ . Для широты  $\varphi = 78^\circ$  длина максимально теоретического видимого сектора геостационарной орбиты составляет около  $87^\circ$ , в условиях реального рельефа местности средняя длина видимого сектора геостационарной орбиты составляет около  $26^\circ$ .

Наблюдение одного геостационарного спутника в данных условиях дает нам окружность на небесной сфере с центром в геостационарном спутнике, угловой радиус окружности равен  $\theta$ , на данной окружности находится проекция базы на небесную сферу. Координаты проекции вектора базы (азимут и зенитное расстояние  $(A, z)$ ) можно связать с углом  $\theta$  и координатами геостационарного спутника  $(A_g, z_g)$  соотношением

$$\cos\theta = \cos z_g \cos z + \sin z \sin z_g \cos(A_g - A), \quad (7)$$

из которого можно установить следующее соотношение для азимута, вернее разности азимутов геостационарного ИСЗ и вектора базы и остальными угловыми величинами:

$$\cos(A_g - A) = \cos\theta \csc z \csc z_g - \ctg z \ctg z_g. \quad (8)$$

На основе соотношения (8), взяв частные производные по всем этим параметрам и заменив дифференциалы конечными приращениями с учетом малости углов, получим следующее соотношение для изменения угла  $(A_g - A)$  в зависимости от изменений  $\theta$ ,  $z$  и  $z_g$ :

$$\Delta(A_g - A) = (-\sin\theta \csc z \csc z_g) \Delta\theta + \left( \csc^2 z \ctg z_g - \cos\theta \csc z_g \frac{\cos z}{\sin^2 z} \right) \Delta z + \left( \csc^2 z_g \ctg z - \cos\theta \csc z \frac{\cos z_g}{\sin^2 z_g} \right) \Delta z_g. \quad (9)$$

Если принять погрешность определения  $\Delta\theta = 0.5'$ , погрешность определения зенитного расстояния для геостационарного ИСЗ  $\Delta z = 0.5'$ , то для характерных величин  $\theta \cong 20^\circ \div 30^\circ$ ,  $z \cong 90^\circ$  и  $z_g \cong 70^\circ \div 80^\circ$  мы можем получить итоговое значение  $\Delta(A_g - A) = 0.4' - 0.5'$ . Также необходимо отметить, что в выражении (9) зенитные расстояния как базы, так и геостационарного спутника присутствуют в составе функции  $\csc z \csc z_g$ , данная функция принимает минимальное значение при значении аргумента  $\frac{\pi}{2}$ , таким образом, наиболее точные значения азимута, полученные данным способом, будут получаться при наблюдении наиболее низких геостационарных спутников.

Для определения азимута нам достаточно наблюдать два геостационарных спутника. Мы получим 2 точки на небесной сфере, которые будут являться пересечениями окружностей для двух спутников. В таком случае горизонтальные координаты проекции базы получаются из решения системы тригонометрических уравнений:

$$\begin{cases} \cos \theta_1 = \cos z_{g1} \cos z + \sin z \sin z_{g1} \cos (A_{g1} - A) \\ \cos \theta_2 = \cos z_{g2} \cos z + \sin z \sin z_{g2} \cos (A_{g2} - A) \end{cases}, \quad (10)$$

где  $(A_{g1}, z_{g1}), (A_{g2}, z_{g2})$  — горизонтальные координаты геостационарных спутников с антенны с известными координатами,  $(A, z)$  — горизонтальные координаты проекции вектора базы на небесную сферу, неизвестные величины, которые необходимо найти,  $\cos \theta$  определяется из уравнения (1).

Данную систему можно решить аналитически. Для начала отметим, что непосредственно азимут  $A$  не присутствует в уравнениях, присутствует разность между азимутом спутника и азимутом направления. Произведем замену переменных, введем переменную  $\Delta A = A_{g1} - A$ , в таком случае  $A_{g2} - A = \Delta A_g + \Delta A$ , где  $\Delta A_g = A_{g2} - A_{g1}$ . Перепишем систему уравнений в виде:

$$\begin{cases} \cos \theta_1 = \cos z_{g1} \cos z + \sin z \sin z_{g1} \cos \Delta A \\ \cos \theta_2 = \cos z_{g2} \cos z + \sin z \sin z_{g2} \cos(\Delta A_g + \Delta A) \\ \cos \theta_1 - \cos z_{g1} \cos z = \sin z \sin z_{g1} \cos \Delta A \\ \cos \theta_2 - \cos z_{g2} \cos z = \sin z \sin z_{g2} \cos(\Delta A_g + \Delta A) \\ \cos \theta_1 \csc z - \cos z_{g1} \operatorname{ctg} z \sin z_{g1} \cos \Delta A \\ \cos \theta_2 \csc z - \cos z_{g2} \operatorname{ctg} z = \sin z_{g2} \cos(\Delta A_g + \Delta A) \\ \cos \theta_1 \csc z_{g1} \csc z - \operatorname{ctg} z_{g1} \operatorname{ctg} z = \cos \Delta A \\ \cos \theta_2 \csc z_{g2} \csc z - \operatorname{ctg} z_{g2} \operatorname{ctg} z = \cos(\Delta A_g + \Delta A) \\ \cos \theta_1 \csc z_{g1} \csc z - \operatorname{ctg} z_{g1} \operatorname{ctg} z = \cos \Delta A \\ \cos \theta_2 \csc z_{g2} \csc z - \operatorname{ctg} z_{g2} \operatorname{ctg} z = \\ = \cos \Delta A_g \cos \Delta A - \sin \Delta A_g \sin \Delta A. \end{cases} \quad (11)$$

Для удобства введем следующие обозначения:  $a_1 = \cos \theta_1 \csc z_{g1}$ ,  $a_2 = -\operatorname{ctg} z_{g1}$ ,  $b_1 = \cos \theta_2 \csc z_{g2}$ ,  $b_2 = -\operatorname{ctg} z_{g2}$ ,  $b_3 = \cos \Delta A_g$ ,  $b_4 = \sin \Delta A_g$ . В таком случае мы можем переписать систему (10) в виде:

$$\begin{cases} a_1 \csc z + a_2 \operatorname{ctg} z = \cos \Delta A \\ b_1 \csc z + b_2 \operatorname{ctg} z = b_3 \cos \Delta A - b_4 \sin \Delta A \end{cases} \quad (12)$$

Вычтем первое уравнение системы (10), умноженное на  $b_3$ , из второго, и поделим второе уравнение на  $b_4$  получив в итоге систему:

$$\begin{cases} a_1 \csc z + a_2 \operatorname{ctg} z = \cos \Delta A \\ c_1 \csc z + c_2 \operatorname{ctg} z = \sin \Delta A \end{cases} \quad (13)$$

где введены промежуточные величины  $c_1 = \frac{(a_1 b_3 - b_1)}{b_4}$  и  $c_2 = \frac{(a_2 b_3 - b_2)}{b_4}$ . Выразим  $\csc z$  и  $\operatorname{ctg} z$  через  $\operatorname{tg} \frac{z}{2}$ , введя обозначение  $x = \operatorname{tg} \frac{z}{2}$ . В таком случае система (13) примет вид:

$$\begin{cases} a_1 \frac{1+x^2}{2x} + a_2 \frac{1-x^2}{2x} = \cos \Delta A \\ c_1 \frac{1+x^2}{2x} + c_2 \frac{1-x^2}{2x} = \sin \Delta A \end{cases},$$

которую в свою очередь можно переписать в виде:

$$\begin{cases} \frac{(a_1+a_2)+(a_1-a_2)x^2}{2x} = \cos \Delta A \\ \frac{(c_1+c_2)+(c_1-c_2)x^2}{2x} = \sin \Delta A \end{cases}. \quad (14)$$

Введя обозначения  $m_1 = a_1 + a_2$ ,  $m_2 = a_1 - a_2$ ,  $n_1 = c_1 + c_2$ ,  $n_2 = c_1 - c_2$  и используя соотношение  $\cos^2 \Delta A + \sin^2 \Delta A = 1$ , мы можем получить уравнение с одной переменной:

$$\frac{(m_1+m_2x^2)^2+(n_1+n_2x^2)^2}{4x^2} = 1,$$

которое в итоге можно записать в виде:

$$(m_2^2 + n_2^2)x^4 + (2n_1n_2 + 2m_1m_2 - 4) + (n_1^2 + m_1^2) = 0. \quad (15)$$

Данное уравнение является биквадратным, и, подставив  $t = x^2$ , мы получаем обычное квадратное уравнение вида:

$$k_1 t^2 + k_2 t + k_3 = 0,$$

где  $k_1 = m_2^2 + n_2^2$ ,  $k_2 = 2n_1n_2 + 2m_1m_2 - 4$ ,  $k_3 = n_1^2 + m_1^2$ .

Таким образом, корни уравнения (15) имеют вид:

$$x_1 = \sqrt{\frac{-k_2 + \sqrt{k_2^2 - 4k_1k_3}}{2k_1}}, \quad (16)$$

$$x_2 = -\sqrt{\frac{-k_2 + \sqrt{k_2^2 - 4k_1k_3}}{2k_1}}, \quad (17)$$

$$x_3 = \sqrt{\frac{-k_2 - \sqrt{k_2^2 - 4k_1k_3}}{2k_1}}, \quad (18)$$

$$x_4 = -\sqrt{\frac{-k_2 - \sqrt{k_2^2 - 4k_1k_3}}{2k_1}}. \quad (19)$$

Соответственно:

$$z_1 = 2 \operatorname{arctg} x_1,$$

$$z_2 = 2 \operatorname{arctg} x_2,$$

$$z_3 = 2 \operatorname{arctg} x_3,$$

$$z_4 = 2 \operatorname{arctg} x_4.$$

Исходя из соотношения (10), мы можем точно определить угол  $\Delta A$  и затем — угол  $A = A_{g1} - \Delta A$ . Таким образом, мы получим четыре пары координат:  $(A_1, z_1), (A_2, z_2), (A_3, z_3), (A_4, z_4)$ . Из соотношений (16)–(19) видно, что половина корней будет

давать отрицательные зенитные расстояния. Данные корни мы можем отбросить. Останутся две пары координат. Интересующую пару координат мы можем определить либо на основе имеющейся априорной информации (очевидно, что при расположении обеих антенн интерферометра в условиях непересеченной местности  $z$  конца базы будет близко к  $90^\circ$ ), либо из наблюдений дополнительного геостационарного спутника.

Данный метод достаточно точен, его основным преимуществом является то, что низкая точность определения координат геостационарных ИСЗ гораздо меньше сказывается на итоговой точности определенного азимута.

В РСДБ учитывается значительное количество эффектов, влияющих на распространение сигнала. Это тропосферная и ионосферная задержка сигнала, гравитационная задержка сигнала, кроме того, исключительно важную роль играет синхронизация стандартов времени и частоты, расположенных на разных РСДБ-антеннах. В нашем случае нам необходимо учитывать или моделировать поправки, связанные с синхронизацией шкал времен. Гравитационная задержка мала, по сравнению с точностью регистрируемой нами задержки  $\tau$ , атмосферные задержки в модель задержки входят в виде разностей, а в силу размеров нашей базы мы можем считать характеристики атмосферы над местом наблюдений одинаковыми и соответствующие разности считать нулевыми.

## Заключение

Предложенный нами метод определения азимута работоспособен, укладывается в требования, предъявляемые для выставки инерциальных навигационных систем. Оборудование для практической реализации данного метода определения азимута может быть создано на основе широко распространенных и отработанных технологий. Метод всепогоден, однако имеет ограничения применимости в области крайне высоких широт.

## Литература

ГКИНП 01-153-81 Руководство по астрономическим определениям. М.: Недра, 1984.

Руководство по астрономо-геодезическим работам при топогеодезическом обеспечении войск. Часть 1. Геодезические работы. М.: Редакционно-издательский отдел Военно-топографической службы, 1980. 422 с.

Руководство по астрономо-геодезическим работам при топогеодезическом обеспечении войск. Часть 3. Гироскопическое ориентирование. М.: Редакционно-издательский отдел Военно-топографической службы, 1979. 224 с.

Ашимов Н. М., Воронков Н. Н. Гироскопическое ориентирование. М.: Недра, 1973 г. 224 с.

Серапинас Б. Б. Геодезические основы карт. М.: МГУ, 2001. 133 с.

Bezdiček V., Dandoš R., Konečni M., et al. Orientation measurement with gyrotheodolite // Geodesy and Cartography. 2018. Vol. 44, no. 3. P. 100–105.

Zhan Y., Zheng Y., Zhang C. Astronomical azimuth determination by Lunar observations // Journal of Surveying Engineering. 2016. Vol. 142, no. 2. P. 04015009.