Труды Института прикладной астрономии РАН, вып. 45, 2018

Вероятность столкновения или сближения двух космических тел

© Д. Е. Вавилов

ИПА РАН, г. Санкт-Петербург, Россия

Задача оценки вероятности столкновения друг с другом двух космических объектов достаточно хорошо изучена, когда одним из объектов является большая планета Солнечной системы, чаще всего Земля. На данный момент точность эфемеридных значений координат и скоростей больших планет высока настолько, что для данной задачи положение планеты на конкретный момент можно считать известным абсолютно точно. В данной же работе рассматривается событие столкновения или сближения двух тел, орбиты у которых нельзя считать точными. Предлагается быстрый линейный метод для оценки вероятности такого события.

Ключевые слова: Вероятность столкновения, вероятность сближения, астероиды, искусственные спутники Земли, космический мусор

Введение

Задача оценить вероятность столкновения астероида с большой планетой возникла еще в 1993 году, когда обнаружилось, что комета Шумейкера–Леви 9 находится на столкновительной орбите с Юпитером. Разработанный Паулом Чодасом линейный метод оценки вероятности [1] оценил вероятность столкновения как 64 %, которая через неделю достигла 95 %.

В такой задаче элементы орбиты большой планеты являются хорошо известными, потому ее положение можно считать известным точно. В данном случае вероятность столкновения определяется нашим знанием орбиты второго тела (малого тела). Именно ошибки в элементах орбиты малого тела не позволяют нам сказать с полной уверенностью, будет ли столкновение или нет.

В данной работе ставится похожая задача. Имеется два объекта, орбиты которых определены с недостаточной точностью. Требуется определить вероятность их сближения на расстояние, меньше заданного. Это может быть ситуация столкновения или сближения на заданное расстояние двух астероидов, двух искусственных спутников Земли (ИСЗ), ИСЗ с элементами космического мусора, сближение космического аппарата с малым телом Солнечной системы. Данная задача представляет интерес не только с точки зрения предотвращения опасной ситуации, как в случае столкновения ИСЗ с элементом космического мусора, при котором искусственный спутник может быть уничтожен и количество космического мусора резко возрастет. Поставленная задача представляет также интерес для случая сближения двух астероидов на небольшое расстояние. По тесному сближению двух астероидов друг с другом можно определить массы одного или двух объектов [2]. Если оценочная вероятность сближения двух астероидов на интересующее нас расстояние будет не мала, то это может являться сигналом для различных обсерваторий поставить высокий приоритет наблюдениям данного возможного события.

Область неопределенности положения объекта

При определении орбиты объекта по набору наблюдений предполагается, как правило, что их ошибки распределены по нормальному закону. В этом случае параметры орбиты данного объекта на конкретную выбранную эпоху находятся методом наименьших квадратов, а матрица ковариации, которая характеризует наше знание о точности полученных параметров, а также об их взаимной корреляции, определяется как обратная матрица к нормальной матрице, умноженной на квадрат среднеквадратического уклонения наблюдений. Чаще всего в качестве параметров орбиты выступают либо 6 кеплеровых элементов орбиты, либо декартовы координаты и скорости. Пусть на момент времени t_0 у нас есть шестимерный вектор декартовых координат и скоростей объекта $\overrightarrow{x_0} = (x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0)$ и матрица ковариации *C₀.* Интегрируя уравнения движения объекта численно в вариациях, мы получим вектор координат и скоростей объекта на произвольный момент *t*, $\vec{x} = (x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$, а также матрицу изохронных производных $\Phi(t_0,t)$:

$$\Phi(t_0, t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial x_0} & \cdots & \frac{\partial x}{\partial \dot{z}_0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \dot{z}}{\partial x_0} & \cdots & \frac{\partial \dot{z}}{\partial \dot{z}_0} \end{pmatrix}.$$

Ковариационная матрица C для вектора $\vec{x}$ на момент t определяется как $C = \Phi C_0 \Phi^{\mathrm{T}}$. Такой способ нахождения матрицы C называется линейным, поскольку элементы ковариационная матрица C на момент t являются линейными комбинациями элементов ковариационной матрицы C_0.

Вероятность того, что в момент t объект находится в области D, равна:

$$\frac{1}{(2\pi)^3 |\det C|^{\frac{1}{2}}} \iiint\limits_D \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\hat{y}^{\mathrm{T}} C^{-1} \hat{y}} d\hat{y}, \qquad (1)$$

где $\hat{y}$ — шестимерный вектор отклонения от вектора координат и скоростей $(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$, det — обозначение определителя матрицы. Заметим, что область D в данном случае тоже шестимерная. Скоростные компоненты области D накладывают ограничения на скорость объекта. Для рассматриваемой в данной работе задаче часто считается, что важен сам факт столкновения или сближения, а скорость объекта может быть любой. Тогда область D в скоростных координатах имеет вид $(-\infty,+\infty)\times(-\infty,+\infty)\times(-\infty,+\infty)$. В этом случае интеграл (1) можно проинтегрировать аналитически по скоростным компонентам и получить матрицу ковариации размером 3×3 для пространственных координат. Однако такая матрица будет совпадать с подматрицей 3×3 матрицы C, составленной из первых трех строк и первых трех столбцов.

Область неопределенности положения объекта часто называют эллипсоидом рассеяния, поскольку поверхность уровня подинтегральной функции является уравнением эллипсоида. В дальнейшем в данной статье будет использоваться данное название.

Вероятность сближения двух объектов

Вероятность сближения двух объектов на расстояние меньшее d — это вероятность того, что расстояние между центрами масс этих объектов становится меньше d. Пусть $\overrightarrow{x_1}$ и C_1 — это вектор положения (только положение, без скоростных координат) и ковариационная матрица объекта номер 1 в момент t, а $\overrightarrow{x_2}$ и C_2 — вектор положения и ковариационная матрица для объекта номер 2. Поскольку ошибки положения двух объектов можно считать независимыми друг от друга, то матрица ковариации для вектора разности $\overrightarrow{x_1}-\overrightarrow{x_2}$ — это сумма матриц ковариаций C_1+C_2. Тогда вероятность того, что расстояние между объектами будет меньше d, есть:

$$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}|\det(C_1+C_2)|^{\frac{1}{2}}}\iiint\limits_{B_d} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\hat{y}^{\mathrm{T}}(C_1+C_2)^{-1}\hat{y}}\,d\hat{y},$$

где $\hat{y}$ — это трехмерный вектор отклонения от нулевого вектора (0,0,0), а B_d — шар с центром в 0 и радиусом d.

Данный подход описан в работе [3] и применен для оценки вероятности столкновения двух ИСЗ. Однако вычисленная таким образом вероятность является лишь вероятностью столкновения в конкретный момент t. В работе [3] предлагается перебирать время t с маленьким шагом и вычислять вероятность для каждого момента. Однако данный способ не является рациональным, поскольку нельзя заранее сказать, в какой момент будет достигаться наибольшее значение вероятности столкновения, а также шаг изменения времени.

В данной работе предлагается использовать плоскость цели для того, чтобы избежать вышеописанный недостаток. Плоскость цели — это плоскость, которая перпендикулярна относительной скорости обоих объектов и содержит один из них. В момент, когда расстояние между объектами становится минимальным, плоскость цели будет содержать оба объекта. В моменты, близкие к моменту минимального сближения, можно считать, что оба объекта движутся прямолинейно. Поэтому если проекции эллипсоидов рассеяния двух объектов имеют пересечения на плоскости цели, то они будут иметь эти же пересечения в пространстве, только в моменты времени, в общем случае, отличные от момента наименьшего сближения. Это схематично изображено на рис. 1, где можно видеть проекцию эллипсоида рассеяния на плоскость цели (эллипс) одного из объектов. Данный эллипс имеет пересечение с эллипсом, соответствующим второму объекту.

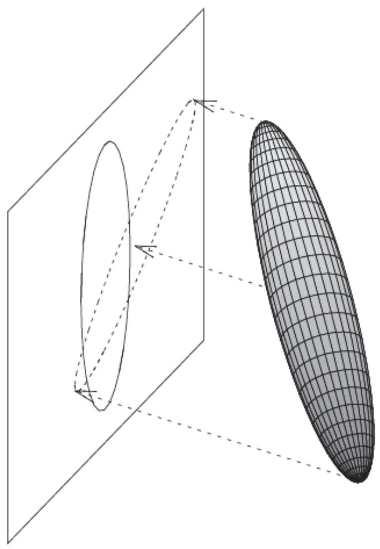

Рис. 1. Проекция эллипсоида рассеяния на плоскость цели

Для вычисления вероятности столкновения нужно найти на плоскости цели эллипсы, которые являются проекциями эллипсоидов рассеяния обоих объектов на плоскость цели. Для этого вычисляются векторы положений объектов $\overrightarrow{x_1}$ и $\overrightarrow{x_2}$ и матрицы ковариации C_1 и C_2 на момент самого тесного сближения. Находится матрица перехода Q в декартову систему координат (ξ, η, ζ), где (ξ, η) лежат в плоскости цели, а ось координат ζ перпендикулярна плоскости. Определяются положения объектов на плоскости цели: $\vec{x}_1^{\xi\eta}$и $\vec{x}_2^{\xi\eta}$ (ζ координаты равны 0, поскольку объекты лежат в плоскости). Матрицы C_1 и C_2 переводятся в систему координат (ξ, η, ζ):

$$C_i^{\xi\eta\zeta} = QC_iQ^{\mathrm{T}}, \qquad i = 1, 2,$$

где $C_1^{\xi\eta\zeta}$ и $C_2^{\xi\eta\zeta}$ — матрицы ковариаций в системе (ξ, η, ζ) для объектов 1 и 2 соответственно. Из свойств ковариационной матрицы следует, что для проекции эллипсоидов рассеяния на плоскость цели достаточно взять ту подматрицу, которая отвечает за соответствующие координаты. В данном случае это координаты (ξ, η). Получаются матрицы размером 2×2 — $C_1^{\xi\eta}$ *и* $C_2^{\xi\eta}$. Берется вектор разности положений объектов на плоскости цели:

$$\vec{x}^{\xi\eta} = \vec{x}_1^{\xi\eta} - \vec{x}_2^{\xi\eta}.$$

Поскольку вектора $\vec{x}_1^{\xi\eta}$ и $\vec{x}_2^{\xi\eta}$ можно считать независимыми, то матрица ковариаций для вектора их разности является:

$$C^{\xi\eta} = C_1^{\xi\eta} + C_2^{\xi\eta}.$$

Тогда вероятность того, что объекты сблизятся на расстояние меньшее *d*, есть:

$$\frac{1}{(2\pi)\left|\det(C_1^{\xi\eta}+C_2^{\xi\eta})\right|^{\frac{1}{2}}}\iint_{S_d} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\hat{y}^{\mathrm{T}}(C_1^{\xi\eta}+C_2^{\xi\eta})^{-1}\hat{y}}\, d\hat{y},$$

где $\hat{y}$ здесь уже двумерный вектор на плоскости цели, S_d — круг с центром в 0 и радиусом *d*. Заметим, что вероятность столкновения двух объектов можно найти, взяв в качестве *d* сумму радиусов двух объектов.

Предложенный в данной работе подход имеет неоспоримое преимущество по сравнению с подходом в работе [3]. Во-первых, четко определен момент, на который необходимо вычислить координаты и ковариационные матрицы объектов. Во-вторых, данный подход определяет вероятность сближения не в заданный конкретный момент времени, а в некотором временном интервале в окрестности момента номинального сближения двух объектов. Данные преимущества делают предложенный метод на порядки быстрее для компьютерного вычисления.

Стоит также отметить, что при данной постановке задачи области возможных положений объектов достаточно хорошо могут быть представлены как эллипсоиды. В работе [4] отмечается, что область неопределенности положений объекта с течением времени вытягивается вдоль номинальной орбиты объекта, что приводит к отклонениям области неопределенности от эллипсоида. Когда потенциальное сближение происходит далеко от номинальных положений объектов, метод плоскости цели может не работать. Однако для текущей задачи если область неопределенности одного из объектов значительно вытянется вдоль орбиты и будет плохо описываться эллипсоидом, то значение вероятности сближения станет пренебрежимо малой величиной и перестанет представлять интерес.

Заключение

В данной работе предложен быстрый метод для оценки вероятности столкновения или сближения двух малых космических тел. К таким телам относятся искусственные спутники Земли, космический мусор, астероиды, кометы, космические аппараты. Данный метод является линейным, т. е. предполагается, что ошибки координат и скоростей объектов в произвольный момент времени *t* линейным образом зависят от ошибок координат и скоростей на эпоху определения орбиты. В методе предлагается проектировать эллипсоиды рассеяния ошибок координат объектов на плоскость цели в момент наиболее тесного сближения объектов. Это позволяет определить интегральное значение вероятности столкновения в окрестности сближения, а не вероятность на конкретный заданный момент.

Литература

1. *Chodas P. W.* Estimating the impact probability of a minor planet with the Earth // Bull. Am. Astron. Soc. — 1993. — Vol. 25. — P. 1236.

2. *Кочетова О. М., Чернетенко Ю. А.* Массы 27 астероидов, найденные динамическим методом // Астрон. Вестник. — М.: Наука, 2014. — Т. 48, №4. — С. 318–324.

3. *Чувашов И. Н., Авдюшев В. А.* Быстрое численное оценивание вероятности столкновения двух объектов в околоземном пространстве // Известия высших учебных заведений. Физика. — Томск: НИТГУ, 2015. — Т. 58, №10–2. — С. 95–99.

4. *Vavilov D. E., Medvedev Yu. D.* A fast method for estimation of the impact probability of near-Earth objects // MNRAS. — 2015. — Vol. 446. — P. 705–709.

The Probability of Collision or Close Approach of Two Space Objects

D. E. Vavilov

The problem of assessing the probability of two space objects to collide with each other is well understood when one of the objects is a major planet of the Solar System, most often the Earth. So far, the orbits of the major planets are determined accurately enough for this task, therefore the position of the major planet at a particular moment can be considered to have zero uncertainty. In this paper, we consider the problem of the collision or a close approach of two bodies whose orbits cannot be regarded to have been determined precisely. A quick linear method is proposed to evaluate the probability of such events.

Keywords: The probability of collision, the probability of approach, asteroids, artificial Earth satellites, space debris.