Труды Института прикладной астрономии РАН, вып. 43, 2017

О повышении точности численного интегрирования уравнений движения астероидов и комет

© А. П. Ершова, Ю. Д. Медведев, D. Е. Вавилов

ИПА РАН, г. Санкт-Петербург, Россия

Разработана модификация метода Энке численного интегрирования уравнения движения для астероидов и комет. Решение уравнения представлено в виде суммы опорного решения и поправки к нему. Опорное решение представлено в виде многочлена Тейлора по степеням времени, который вычисляется с повышенной точностью. Дифференциальное уравнение записывается для поправки, и поправка находится интегрированием данного уравнения с обычной, не повышенной точностью одношаговым численным методом. При интегрировании шаг выбирается таким образом, чтобы значение поправки было меньше заданной величины. Такой подход позволяет повысить число значащих цифр и, следовательно, увеличить точность численного интегрирования без существенного увеличения времени интегрирования.

Ключевые слова: численное интегрирование, метод Энке, Фортран, точность интегрирования.

Введение

В языке Фортран существует возможность производить вычисления как с двойной (16 десятичных знаков мантиссы), так и с четверной (32 знака) точностью. Однако, вычисления с 32 знаками реализованы программно, и поэтому их выполнение требует в десять раз больше времени, чем с 16 знаками. Иногда для минимизации накапливаемой при численном интегрировании погрешности приходится производить вычисления с четверной точностью, что приводит к сильному увеличению машинного времени. В данной работе предлагается способ численного интегрирования, в котором комбинируются вычисления с двойной и четверной точностью. Данный подход позволяет увеличить точность численного интегрирования без значительного увеличения затрат машинного времени. Подобный подход был реализован в работе [1], но в этой работе комбинировались вычисления с одинарной и двойной точностью на БЭСМ-6.

Псевдо-четверная точность вычислений

Традиционная схема численного интегрирования предполагает вычисление изменений интегрируемых величин на каждом шаге. При интегрировании векторного уравнения движения значения векторов положения и скорости на каждом шаге представляет собой сумму этих величин на начало шага плюс их изменения за шаг. Использование одношагового численного метода позволяет контролировать малость величины изменений, уменьшая и увеличивая шаг. При численном интегрировании большая часть машинного времени тратится на вычисления правой части уравнений движения. Время, требуемое для всех остальных операций, сравнительно мало. Используя это обстоятельство, мы можем увеличить число значащих цифр в значениях интегрируемых величин, практически не увеличивая время их вычисления. Для этого вычислим правую часть с двойной точностью, но сохраним результат интегрирования с четверной. Тогда, если количество значащих цифр в правой части равно M, а ее значение на N порядков меньше, чем значение интегрируемой величины, то количество значащих цифр мантиссы суммарной величины будет $M+N$. Порядок прибавляемой величины можно контролировать величиной шага интегрирования. Таким образом можно увеличить число значащих цифр результата. Назовем этот приём численным интегрированием с псевдо-четверной точностью. Выигрыш в дополнительных значащих цифрах тем больше, чем меньше прибавляемая на одном шаге величина при фиксированном шаге интегрирования. Поэтому вполне логично воспользоваться методом Энке.

Модифицированный метод Энке

В классическом методе Энке возмущенное движение представляется в виде суммы двух движений: опорного невозмущенного и отклонения возмущенного движения от опорного.

Пусть уравнение движения имеет вид (1), где $\boldsymbol{x}$ — вектор положения тела, $\ddot{\boldsymbol{x}}$ — вектор ускорений, r — гелиоцентрическое расстояние тела, k — постоянная Гаусса, $\boldsymbol{F}$ — сумма всех возмущающих ускорений. Уравнение (2) представляет собой соответствующую невозмущённую задачу двух тел, решение которой является известным. В этом уравнении $\boldsymbol{x}_k$ и r_K — вектор положения и гелиоцентрическое расстояние невозмущенной задачи двух тел. Вычтем уравнение (2) из уравнения (1) и получим уравнение (3).

$$\ddot{\boldsymbol{x}} + \frac{k^2}{r^3}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, t) \tag{1}$$

$$\ddot{\boldsymbol{x}}_K + \frac{k^2}{r_K^3}\boldsymbol{x}_K = 0 \tag{2}$$

$$\Delta\ddot{\boldsymbol{x}} + k^2\left(\frac{x}{r^3} - \frac{x_K}{r_K^3}\right) = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, t) \tag{3}$$

$$\Delta\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_K.$$

Суть метода Энке заключается в том, чтобы интегрировать именно уравнение (3), а не (1). Решением (3) есть поправка, которую нужно добавить к положению на оскулирующей кеплеровой орбите, чтобы получить возмущенное положение тела. Существует ряд работ, посвящённых различным модификациям метода Энке [3, 4, 5, 6], суть которых сводится к изменениям опорного движения, позволяющего частично учитывать возмущения.

Модификация, внесённая в метод Энке в настоящей работе, заключается в том, что опорным решением является не кеплеров эллипс, а разложение векторной функции возмущающих ускорений в ряд Тейлора по степеням времени. Это разложение вычисляется в начале каждого шага интегрирования и определяется выражением (4):

$$\boldsymbol{x}_h = \boldsymbol{x}_0 + \textstyle\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{x}^{(\boldsymbol{i})}\frac{h^i}{i!}, \tag{4}$$

Здесь $\boldsymbol{x}_0$ — значение вектора положения, полученное на предыдущем шаге,
$\dot{\boldsymbol{x}}$ —вектор скорости, полученный на предыдущем шаге,
$\ddot{\boldsymbol{x}} = -k^2\frac{\boldsymbol{x_0}}{r_0^3} + \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_0, t_0)$ — ускорение в точке $\boldsymbol{x}_0$, r_0 — гелиоцентрическое расстояние, $\dddot{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{x}^{(4)}, \dots$ — производные ускорения, h — шаг интегрирования.

Дважды дифференцируя выражение (4) и вычитая из основного уравнения (1), получим векторное уравнение (5), которое мы и будем интегрировать.

$$\Delta\ddot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, t) - \textstyle\sum_{i=0}^{N-2} \boldsymbol{x}^{(i+2)}\frac{h^i}{i!} \tag{5}$$

$$\Delta\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_h.$$

В правой части уравнения (5) возникают разности близких чисел, что ведёт к потере точности при численном интегрировании. Поэтому в уравнении использовано преобразование Энке, позволяющее избежать вычитания близких чисел [2], если мы имеем дело с гравитационными ускорениями.

Для негравитационных ускорений классическое преобразование непригодно, однако негравитационные ускорения в движении небесных тел, как правило, малы. Поэтому при численном интегрировании они в опорное движение могут и не включаться, а входить слагаемыми в векторную функцию $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, t)$. Здесь следует отметить, что в этом случае вектор ускорения может зависеть не только от текущего вектора положения $\boldsymbol{x}$, но и от вектора скорости $\dot{\boldsymbol{x}}$.

Модифицированный метод Энке подходит для интегрирования многих задач небесной механики, которые включают в себя только гравитационные силы или силы, выражающиеся похожим образом (например, фотогравитационная задача).

Тестирование разработанного интегратора

Для оценки точности метода выполнено интегрирование векторного уравнения движения с одними и теми же начальными условиями тремя разными методами:

1) Модифицированный метод Энке с псевдо-четверной точностью вычислений. В качестве опорного метода (метода, которым интегрировалось уравнение (5)), был взят неявный одношаговый метод Рунге–Кутты восьмого порядка. Шаг выбирался таким образом, чтобы поправка Энке по абсолютной величине оказывалась в интервале между 10^{-11} и 10^{-10}.

2) Неявный метод Рунге–Кутты восьмого порядка с выполнением всех вычислений с двойной точностью. Это делалось для сравнения, чтобы проиллюстрировать выигрыш в точности. Шаг был таким же, как шаг тестируемого метода.

3) Неявный метод Рунге–Кутты восьмого порядка с выполнением всех вычислений с четверной точностью. Это — контрольный метод, его результаты использовались для оценки точности интегрирования новым методом. При интегрировании этим методом вычисления проводились с шагом в 10 раз меньшим, чем шаг тестируемого метода. Точность контрольного метода оценена интегрированием «вперёд-назад» в 23 десятичных знака.

В качестве начальных данных для уравнений движения выбраны элементы кометы 36 P/Whipple на эпоху 2001 [7].

В уравнении движения учитывалось гравитационное ускорение от Солнца и восьми больших планет. Движение планет вычислялись по формулам невозмущенного движения. Элементы планет взяты на эпоху 2000.0 [8], в значениях которых считались точными 32 знака. Это позволило исключить влияние ошибок координат планет на точность сравнения различных методов при интегрировании уравнений движения кометы 36 P/Whipple.

На рис. 1 представлены результаты сравнения двух первых методов с контрольным. По оси ординат отложены значения десятичного логарифма евклидовой нормы разности координат, полученных выбранным и контрольным методами, по оси абсцисс отложено время. Видно, что интегрирование уравнений движения только с гравитационными ускорениями модифицированным методом Энке с псевдочетверной точностью позволило получить результат точнее на 6 десятичных разрядов.

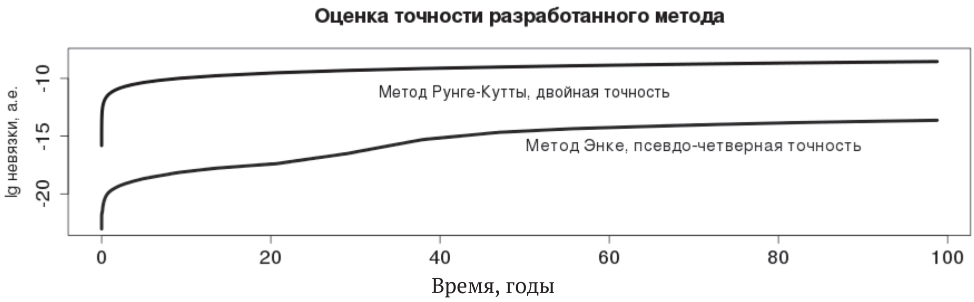

Рис. 1. Демонстрация выигрыша в точности с псевдо-четверной точностью вычислений при интегрировании уравнений движения только с гравитационными ускорениями

Аналогичное сравнение проведено для случая, когда в уравнения движения включались негравитационные ускорения, описываемые моделью Марсдена для учёта реактивного ускорения, испытываемого кометой вблизи Солнца. В этом случае негравитационные ускорения в опорном движении не учитывались, а включались в вектор ускорений дополнительными слагаемыми.

В качестве начальных данных выбраны элементы и негравитационные ускорения кометы 36 P/Whipple на эпоху 2001 [7]. В качестве тестируемого метода выступает неявный одношаговый метод Рунге–Кутты восьмого порядка, выполняющий вычисления с псевдо-четверной точностью. Шаг выбирался таким, чтобы слагаемое, вычисляемое с двойной точностью, оказывалось в пределах между $1.6 \cdot 10^{-5}$ и $2 \cdot 10^{-5}$. Негравитационные ускорения в опорное движение не включались, а входили дополнительным слагаемым в уравнение для поправки.

На рис. 2 показаны результаты сравнения методов при интегрировании уравнений движения с негравитационными ускорениями. На этом рисунке оси координат такие же, как и на рис. 1. В этом случае выигрыш в точности составил 4 порядка.

Для оценки выигрыша во времени, который даёт модифицированный метод Энке, было произведено интегрирование теми же тремя методами на одинаковое число шагов. Рассматривался случай, когда интегрируемые уравнения движения имеют только гравитационные ускорения.

В таблице представлены результаты сравнения скорости метода: отношение времени, потраченного на вычисления тестируемым методом, ко времени двух других интеграторов. Во всех трёх случаях интегрирование производилось на одном и том же компьютере.

Таким образом, дополнительные значащие цифры при помощи разработанного метода получены за счёт увеличения времени вычислений всего на 10 %.

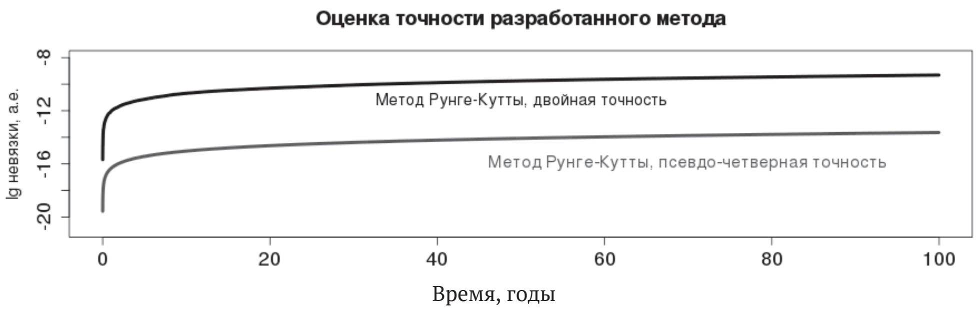

Рис. 2. Демонстрация выигрыша в точности с псевдо-четверной точностью вычислений при интегрировании уравнений движения с негравитационными ускорениями

Таблица

Сравнение скорости вычислений различными методами

Число шагов	Вычисления с четверной точностью	Вычисления с двойной точностью
10 000	0.40	1.09
100 000	0.40	1.12
1 000 000	0.43	1.12

Заключение

Подводя итоги, можно утверждать, что вычисления с псевдочетверной точностью позволяют улучшить результат численного интегрирования уравнений движения без ощутимого увеличения времени интегрирования. В случае гравитационной модели движения выигрыш в точности интегрирования составил 6 порядков. При интегрировании уравнений движения кометы, имеющих помимо гравитационных, реактивные ускорения, выигрыш составил 4 порядка.

Исследование выполнено при финансовой поддержке гранта РФФИ в рамках научного проекта N 16-02-00805, а также Российского научного фонда (грант №16-12-00071).

Литература

1. *Медведев Ю. Д.* Определение орбит комет, имеющих сближения с планетами: диссертация на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук. Институт теоретической астрономии Академии наук СССР, Ленинград, 1986 г.

2. *Рой А.* Движение по орбитам // М.: Мир, 1981. — 544 с.

3. *Батраков Ю. В., Макарова Е. Н.* Обобщенный метод Энке для изучения возмущенного движения // Бюлл. ИТА АН СССР. — 1979. — Т. 14. — С. 397–401.

4. *Шефер В. А.* Сверхоскулирующие промежуточные орбиты для аппроксимации возмущенного движения. Касание второго порядка // Астрон. журн. — 1998. — Т. 75. — С. 945–953.

5. *Шефер В. А.* Сверхоскулирующие промежуточные орбиты для аппроксимации возмущенного движения. Касание третьего порядка // Астрон. журн. — 1998. — Т. 75. — С. 954–960.

6. *Shefer V. A.* Osculating and superosculating intermediate orbits and their applications // Celest. Mech. and Dyn. Astr. 2002. — Vol. 82. — P. 19–59.

7. Электронный ресурс (https://ssd.jpl.nasa.gov).

8. Эфемериды малых планет на 2001 г. Гл. ред. В. А. Шор. СПб.: Наука, 2001. — 870 с.

Improved Precision of Numerical Integration for Equations of Motion of Asteroids and Comets

A. P. Ershova, Yu. D. Medvedev, D. E. Vavilov

We have modified the Encke Method for numerical integration of differential equations of motion of asteroids and comets. The numerical solution is considered as a sum of the approximate solution and a small term representing the deviation from the approximate solution. The Taylor polynomial in power of time is taken as the approximation, which is calculated with multiple accuracy. The differential equation is written for the small term and the term is computed by integration the differential equation with ordinary precision. The integration step is chosen so that the term is less than a certain value. This approach allows us to increase the precision of numerical integration without significantly increasing the integration time.

Keywords: numerical integration, Encke method, Fortran, precision of integration.