Труды Института прикладной астрономии РАН, вып. 42, 2017

Тригонометрическая теория вращения Луны (случай Пуассона)

© Т. В. Иванова

ИПА РАН, г. Санкт-Петербург, Россия

В рамках общей планетной теории GPT построена полуаналитическая теория вращения осесимметричной твердотельной Луны в тригонометрической форме.

Ключевые слова: теория вращения Луны, случай Пуассона, параметры Эйлера, вековая система, общая планетная теория.

Введение

В данной работе разработана теория вращения осесимметричной твердотельной Луны в форме, согласованной с общей планетной теорией (GPT) [1], методика которой позволяет построить теории орбитального и вращательного движений небесных тел в тригонометрической форме без фиктивных вековых членов. Основная идея метода GPT состоит в разделении быстро и медленно меняющихся переменных и в приведении динамической системы к нормальной форме методом Биркгофа, что позволяет совместное приведение уравнений поступательного движения больших планет и Луны и уравнений вращательного движения Луны к автономной вековой системе, описывающей эволюцию планетных и лунной орбит независимо от вращения Луны и эволюцию вращения Луны в зависимости от поведения эволюционных переменных планетных и лунного движений по их орбитам.

В процессе решения долгопериодические члены выделяются в вековую систему, имеющую форму полиномиальной системы дифференциальных уравнений для больших планет, Луны и вращения Луны. В результате, теория вращения Луны представляется в виде рядов по степеням эволюционных переменных с квази-периодическими коэффициентами.

Уравнения вращательного движения Луны для случая Пуассона

Осесимметричная модель вращения Луны характеризуется равенством главных моментов инерции (I_1, I_2, I_3) для наибольших осей эллипсоида инерции и постоянной угловой скоростью вращения Луны ω

$$I_1 = I_2 < I_3, \quad \omega = \text{const}. \tag{1}$$

Эта модель может рассматриваться как первое приближение к построению реальной трехосной теории вращения Луны. В углах Эйлера ψ, θ, ϕ ее можно описать классическими уравнениями Пуассона

$$\dot{\psi} = -\frac{1}{I_3 \omega \sin\theta} \frac{\partial U}{\partial \theta}, \quad \dot{\theta} = -\frac{1}{I_3 \omega \sin\theta} \frac{\partial U}{\partial \psi} \tag{2}$$

с силовой функцией U.

Для проведения компьютерных вычислений удобно заменить три угла Эйлера четырьмя комплексными параметрами Эйлера u, $\bar{u}$, v, $\bar{v}$

$$u = -\sin\frac{\theta}{2} \exp\left(-\mathrm{i}\frac{\psi + \phi}{2}\right), \qquad v = \mathrm{i}\cos\frac{\theta}{2} \exp\left(\mathrm{i}\frac{\psi - \phi}{2}\right), \tag{3}$$

причем

$$u\bar{u} + v\bar{v} \equiv 1. \tag{4}$$

Здесь и далее $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$, величина с чертой сверху означает комплексно-сопряженную величину.

Тогда соответствующие случаю Пуассона уравнения вращения Луны (2) в Эйлеровых параметрах преобразуются в следующие уравнения:

$$\dot{u} = \mathrm{i}n(u + R_5), \quad \dot{v} = \mathrm{i}n(v + R_7), \quad \dot{\bar{u}} = -\mathrm{i}n(\bar{u} + R_6), \quad \dot{\bar{v}} = -\mathrm{i}n(\bar{v} + R_8) \tag{5}$$

с постоянной частотой

$$n = -\frac{1}{2}\omega$$

и с правыми частями:

$$R_5 = -\frac{1}{I_3 \omega_3^2}\left(u \frac{\partial U}{\partial \bar{v}} - v \frac{\partial U}{\partial \bar{u}}\right)\bar{v}, \quad R_7 = -R_5 \bar{v}^{-1} \bar{u}, \quad R_6 = -\bar{R}_5, \quad R_8 = -\bar{R}_7. \tag{6}$$

Силовая функция

В квадрупольном приближении силовая функция для Луны, обусловленная действием Солнца и Земли, может быть представлена в прямоугольных координатах в форме

$$U = 2n^2 I_3 K\left[\left(\frac{A_3}{r_0}\right)^5\left(\frac{z_0'}{A_3}\right)^2 + \varepsilon\left(\frac{A_E}{r_E}\right)^5\left(\frac{z_E'}{A_E}\right)^2\right]. \qquad (7)$$

$$\varepsilon = \frac{M_E}{M_0}\left(\frac{A_3}{A_E}\right)^3,\ K = \frac{-3}{4}\frac{I_3 - I_1}{I_3}\frac{GM_0}{A_3^3\omega^2}\ .$$

Здесь G — гравитационная постоянная, K — малый параметр, M_0, r_0, M_E, r_E — массы и селеноцентрические радиусы-векторы Солнца и Земли, соответственно, M_i и r_i — массы и гелиоцентрические радиусы-векторы больших планет $i = 1, 2, \ldots, 8$. Индекс $i = 3$ относится к барицентру Земля–Луна, M_9 и r_9 — масса и геоцентрический радиус-вектор Луны, A_E, A_3 — большие полуоси селеноцентрической орбиты Земли и гелиоцентрической орбиты барицентра системы Земля–Луна, соответственно. Координаты x', y', z' относятся к вращающейся системе координат, жестко связанной с телом Луны, координаты x, y, z связаны с инерциальной системой координат. Переход от инерциальных координат к вращающимся производится по формулам

$$x' + \mathrm{i}y' = -v^2(x+\mathrm{i}y) + u^2(x-\mathrm{i}y) + 2uvz,$$
$$z' = \bar{u}v(x+\mathrm{i}y) + u\bar{v}(x-\mathrm{i}y) + (-u\bar{u} + v\bar{v})z. \qquad (8)$$

Следуя методике общей планетной теории, в рамках которой строится теория вращения Луны, вместо прямоугольных координат x_i, y_i, z_i ($i = 1, 2, \ldots, 9$) вводятся безразмерные комплексно-сопряженные переменные p_i, $q_i = \bar{p}_i$ и вещественные переменные w_i

$$x_i + \mathrm{i}\,y_i = A_i(1-p_i)\zeta_i,\quad z_i = A_i w_i,\quad \zeta_i = \exp\mathrm{i}\,\lambda_i,\quad \lambda_i = n_i t + \varepsilon_i\,, \qquad (9)$$

характеризующие отклонения реальных движений планет и Луны от плоских круговых движений с большими полуосями A_i, связанными со средними движениями n_i третьим законом Кеплера

$$n_i^2 A_i^3 = G(M_0 + M_i)\quad (i = 1,2,\ldots,8),\qquad n_9^2 A_9^3 = GM_3.$$

Здесь λ_i — средние долготы планет и Луны. Переменные p и q имеют порядок малости эксцентриситета, переменные w — порядок малости наклона орбит.

Селеноцентрические координаты Земли и Солнца вычисляются по формулам

$$x_E = -x_9, \qquad y_E = -y_9, \qquad z_E = -z_9.$$

$$x_0 + \mathrm{i}y_0 = A_3\left[-(1-p_3)\zeta_3 + \sigma(1-p_9)\zeta_9\right], \quad z_0 = A_3(-w_3 + \sigma w_9), \tag{10}$$

где $\sigma = \dfrac{M_E}{M_3}\dfrac{A_E}{A_3}$.

Подставляя в (7) координаты Земли и Солнца (8) с учетом (9) и (10), получаем в квадрупольном приближении окончательное выражение для силовой функции уравнений вращения Луны, обусловленной действием Земли и Солнца

$$U = 2n^2 I_3 K[k + u^2\bar{v}^2 f + \bar{u}^2 v^2 \bar{f} + 2u\bar{v}(u\bar{u} - v\bar{v})g + 2\bar{u}v(u\bar{u} - v\bar{v})\bar{g} + 2u\bar{u}v\bar{v}h]. \tag{11}$$

Замкнутая форма коэффициентов k, f, g, h представлена в виде следующих выражений:

$$k = \left(\frac{A_3}{r_0}\right)^5 (w_3 + \sigma w_9)^2 + \varepsilon\left(\frac{A_9}{r_9}\right)^5 w_9^2,$$

$$f = \left(\frac{A_3}{r_0}\right)^5 \left[(1-q_3)\zeta_3^{-1} + \sigma(1-q_9)\zeta_9^{-1}\right]^2 + \varepsilon\left(\frac{A_9}{r_9}\right)^5 (1-q_9)^2\zeta_9^{-2},$$

$$g = \left(\frac{A_3}{r_0}\right)^5 \left[(1-q_3)\zeta_3^{-1} + \sigma(1-q_9)\zeta_9^{-1}\right](w_3 + \sigma w_9) - \varepsilon\left(\frac{A_9}{r_9}\right)^5 (1-q_9)w_9\zeta_9^{-1},$$

$$h = \left(\frac{A_3}{r_0}\right)^5 \{[(1-p_3)\zeta_3 + \sigma(1-p_9)\zeta_9][(1-q_3)\zeta_3^{-1} + \sigma(1-q_9)\zeta_9^{-1}]$$

$$-2(w_3 + \sigma w_9)^2\} + \varepsilon\left(\frac{A_9}{r_9}\right)^5 [(1-p_9)(1-q_9) - 2w_9^2].$$

Функция k не используется далее при выводе уравнений вращения, поскольку она не содержит параметров Эйлера (для построения правых частей уравнений вращения требуются производные от силовой функции только по параметрам Эйлера). Подставляя выражение для силовой функции (11) в правые части (6) уравнений вращения, получаем их в виде функций 5-го порядка относительно параметров Эйлера с коэффициентами k, f, g, h в форме рядов Пуассона со степенными переменными p_i, q_i, w_i и экспоненциальными переменными ζ_i ($i = \overline{3, 9}$), например:

$$R_5 = K\left[u^3\bar{v}f - \bar{u}v^3\bar{f} + u^2(u\bar{u} - 3v\bar{v})g + v^2(v\bar{v} - 3u\bar{u})\bar{g} + uv(u\bar{u} - v\bar{v})h\right]\bar{v}\,. \quad (12)$$

Построение вековой системы

Как видно из представления правых частей (12), они зависят от координат планет и Луны только через коэффициенты f, g, h. Обычно они считаются известными функциями времени. Вместо этого, будем рассматривать их как функции, удовлетворяющие некоторым дифференциальным уравнениям [1]. Объединяя эти уравнения с уравнениями вращения (5), получаем полную систему, описывающую орбитальное движение планет и Луны и вращательное движение Луны.

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathrm{i}\mathcal{N}\left[P\mathbf{X} + \mathbf{R}(\mathbf{X},t)\right]. \quad (13)$$

Здесь $\mathbf{X} = (\mathbf{a},\ \bar{\mathbf{a}},\ \mathbf{b},\ \bar{\mathbf{b}},\ u,\ \bar{u},\ v,\ \bar{v})$ и $\mathbf{R} = (\mathbf{R}_1,\ \ldots,\ \mathbf{R}_4,\ R_5,\ \ldots, R_8)$ — векторы с 40 компонентами, $\mathbf{a}$, $\bar{\mathbf{a}}$, $\mathbf{b}$, $\bar{\mathbf{b}}$ — 9-мерные векторы переменных типа Лапласа, $\mathbf{R}_i$ ($i = 1, 2, 3, 4$) — 9-мерные векторы правых частей уравнений орбитального движения планет и Луны, $\mathbf{R}_2 = -\bar{\mathbf{R}}_1$, $\mathbf{R}_4 = -\bar{\mathbf{R}}_3$,

R_i ($i = 5, 6, 7, 8$) — правые части уравнений вращательного движения Луны (см. (6), (12)),

$\mathcal{N}$ и P — 40 × 40 диагональные матрицы,

$\mathcal{N} = \mathrm{diag}(N,\ N,\ N,\ N,\ n,\ n,\ n)$, $\qquad P = \mathrm{diag}(E, -E,\ E, -E,\ 1, -1,\ 1, -1)$,

N — 9 × 9 диагональная матрица средних движений n_i,

E — 9 × 9 единичная матрица.

Для того, чтобы проинтегрировать систему (13) без вековых членов, используется метод нормализации Биркгофа, который заключается в нахождении такого преобразования переменных, которое обеспечило бы интегрирование уравнений в новых переменных в чисто тригонометрической форме.

Это достигается разделением медленно и быстро изменяющихся переменных. Основная идея нормализации Биркгофа заключается в построении степенных рядов вида

$$\mathbf{X} = \mathbf{Y} + \mathbf{\Gamma}(\mathbf{Y},t)\,, \quad (14)$$

приводящих исходную систему уравнений (13) к новой системе

$$\dot{\mathbf{Y}} = \mathrm{i}\mathcal{N}\left[P\mathbf{Y} + \mathbf{F}(\mathbf{Y})\right], \qquad (15)$$

где $\mathbf{Y} = (\mathbf{z},\ \bar{\mathbf{z}},\ \mathbf{w},\ \bar{\mathbf{w}},\ \mathrm{g},\ \bar{g},\ h,\ \bar{h})$ — вектор новых переменных ($\mathbf{z}$, $\bar{\mathbf{z}}$, $\mathbf{w}$, $\bar{\mathbf{w}}$ — 9-мерные векторы, $\mathrm{g},\ \bar{g},\ h,\ \bar{h}$ — скалярные переменные). Функции $\mathbf{\Gamma}$ и **F** находятся итерациями по степеням **Y** по формулам

$$\mathbf{U} = \mathbf{R} - \mathcal{N}^{-1}\mathbf{\Gamma}_{\mathbf{Y}}\mathcal{N}\mathbf{U}^{*}, \qquad (16)$$

$$\mathbf{\Gamma}_t + \mathrm{i}(\mathbf{\Gamma}_Y\mathcal{N}P\mathbf{Y} - \mathcal{N}P\mathbf{\Gamma}) = \mathrm{i}N\mathbf{U}^{+}, \qquad (17)$$

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}^{*} + \mathbf{U}^{+}, \qquad \mathbf{F} = \mathbf{U}^{*}. \qquad (18)$$

Разбиение вспомогательной функции **U** на две части производится таким образом, чтобы обеспечить интегрирование (17) для $\mathbf{\Gamma}$ без вековых членов.

Таким образом, все члены с критическими соотношениями индексов, приводящим к нулевым значениям знаменателей при определении $\mathbf{\Gamma}$, переносятся в функции **F**, которые и являются правыми частями вековой системы для орбитального движения планет и Луны и вращения Луны. Вековая система для орбитального движения планет и Луны была построена в [1], [2]. Она не зависит от вращения Луны и может быть представлена в виде

$$\left.\begin{aligned} \dot{z}_\tau &= \mathrm{i}(\mu_\tau z_\tau + n_\tau U^{*}_{1\tau}) \\ \dot{w}_\tau &= \mathrm{i}(\nu_\tau w_\tau + n_\tau U^{*}_{3\tau}) \end{aligned}\right\} \qquad (19)$$

с

$$U^{*}_{\kappa\tau} = \begin{pmatrix} z_\tau, & \kappa = 1 \\ w_\tau, & \kappa = 3 \end{pmatrix} \sum U^{(\kappa\tau)}_{\mathbf{km}} (z_j \bar{z}_j)^{k_j} (w_j \bar{w}_j)^{m_j}, \ (\kappa = 1,\ 3;\ \tau,\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ 9), \qquad (20)$$

где переменные **z**, **w** связаны с исходными координатами целым рядом замен переменных; μ_τ, ν_τ — собственные частоты движений перигелиев и узлов планет и перигея и узла Луны; **k**, **m** — 9-мерные векторы степенных индексов k_j, m_j, соответственно.

Эта система допускает очевидные интегралы

$$z_j \bar{z}_j = \mathrm{const}, \qquad w_j \bar{w}_j = \mathrm{const}, \qquad (21)$$

ведущие сразу же к интегрированию вековой системы для планет и Луны. Кроме того, одна из частот для облических переменных $\nu_\tau = 0$, в результате чего в линейной вековой теории для планет координата

w_N, которой соответствует нулевая частота $\nu_N = 0$, является комплексной постоянной ($w_N = \mathrm{const}$).

Вековая система для вращательного движения осесимметричной Луны представляется в виде

$$\left.\begin{aligned} \dot{g} &= \mathrm{i}n(g + U_5^*) \\ \dot{h} &= \mathrm{i}n(h + U_7^*) \end{aligned}\right\}. \tag{22}$$

Наши вычисления показали, что правые части U_5^* и U_7^* состоят из двух частей. Первая часть имеет форму

$$U_\kappa^{*(1)} = \begin{pmatrix} g, & \kappa = 5 \\ h, & \kappa = 7 \end{pmatrix} \sum U_{\mathbf{km}}^{(\kappa qs)} (g\bar{g})^q (h\bar{h})^s (w_N \bar{w}_N)^s \prod_{j=1}^{9} (z_j \bar{z}_j)^{k_j} (w_j \bar{w}_j)^{m_j} . \tag{23}$$

Вторая часть имеет более общую форму

$$U_\kappa^{*(2)} = \sum U_{\mathbf{km}}^{(\kappa pqrs)} g^p \bar{g}^q h^r \bar{h}^s (w_N \bar{w}_N)^{\max\{r-\delta_{\kappa 7}, s\}} \prod_{j=1}^{9} (z_j \bar{z}_j)^{k_j} (w_j \bar{w}_j)^{m_j} . \tag{24}$$

Здесь $\delta_{\kappa 7}$ — символ Кронекера. Скалярные индексы p, q, r, s удовлетворяют условию

$$p - q + r - s = 1.$$

Вид правых частей позволяет записать (22) в форме

$$\left.\begin{aligned} \dot{g} &= \mathrm{i}n\left[gG(g\bar{g}, h\bar{h}, z_j\bar{z}_j, w_j\bar{w}_j) + \Phi(g, \bar{g}, h, \bar{h}, z_j\bar{z}_j, w_j\bar{w}_j)\right] \\ \dot{h} &= \mathrm{i}n\left[hH(g\bar{g}, h\bar{h}, z_j\bar{z}_j, wj\bar{w}_j) + \Psi(g, \bar{g}, h, \bar{h}, z_j\bar{z}_j, w_j\bar{w}_j)\right] \end{aligned}\right\}, \tag{25}$$

где G, H, Φ и Ψ являются голоморфными функциями своих аргументов

$$gG = g + U_5^{*(1)}, \qquad hH = h + U_7^{*(1)}, \qquad \Phi = U_5^{*(2)}, \qquad \Psi = U_7^{*(2)}.$$

Эта система имеет интеграл

$$g\bar{g} + h\bar{h}\, w_N \bar{w}_N = C = \mathrm{const}\, . \tag{26}$$

Решение вековой системы

Вековая система вращения Луны (25), может быть исследована различными методами. В данной работе для оценки постоянных интегрирования используется метод вариации произвольных постоянных. Вычисления показали, что в рамках линейной теории относительно малого параметра K правые части вековой системы принимают довольно простой вид:

$$G = 1 + (g\bar{g} - h\bar{h}\, w_N \bar{w}_N) h\bar{h}\, w_N \bar{w}_N \Sigma ,$$

$$H = 1 - (g\bar{g} - h\bar{h}\, w_N \bar{w}_N) g\bar{g} \Sigma ,$$

$$\Phi = [g^3\bar{g} - 3g^2 h\bar{h}\, w_N \bar{w}_N - 3g\bar{g} h^2 w_N \bar{w}_N + h^3 \bar{h} (w_N \bar{w}_N)^2] \bar{h}\, w_N \bar{w}_N \Sigma' ,$$

$$\Psi = -[g^3\bar{g} - 3g^2 h\bar{h}\, w_N \bar{w}_N - 3g\bar{g} h^2 w_N \bar{w}_N + h^3 \bar{h} (w_N \bar{w}_N)^2] \bar{g} \Sigma' ,$$

где, для краткости,

$$\Sigma = \sum_{\mathbf{k},\mathbf{m}} C_{\mathbf{km}} \prod_{j=1}^{9} (z_j \bar{z}_j)^{k_j} (w_j \bar{w}_j)^{m_j} , \qquad \Sigma' = \sum_{\mathbf{k},\mathbf{m}} D_{\mathbf{km}} \prod_{j=1}^{9} (z_j \bar{z}_j)^{k_j} (w_j \bar{w}_j)^{m_j}$$

с численными коэффициентами $C_{\mathbf{km}}$ и $D_{\mathbf{km}}$.

Поскольку члены с коэффициентами $D_{\mathbf{km}}$ ($D_{\mathbf{km}}$ члены) меньше соответствующих $C_{\mathbf{km}}$ членов на два порядка относительно w_N, временно опустим $D_{\mathbf{km}}$ члены. Тогда тригонометрическое решение представляется в виде

$$g = g_0 \exp \mathrm{i}\xi, \quad h = h_0 \exp \mathrm{i}\eta, \quad \xi = n\Delta t + \xi_0, \quad \eta = n\chi t + \eta_0 \tag{27}$$

с вещественными постоянными g_0, h_0, ξ_0, η_0 и частотами

$$\Delta = G, \qquad \chi = H . \tag{28}$$

Из комбинаций трех частот n, $n\Delta$, $n\chi$ можно восстановить фундаментальные частоты классического решения.

Для учета влияния $D_{\mathbf{km}}$ членов сохраняется форма решения (27) с постоянными частотами Δ, χ и медленно меняющимися g_0, h_0, ξ_0, η_0. Уравнения (29)–(32) позволяют определить эти константы интегрирования.

$$\dot{g}_0 = n h_0 w_N \bar{w}_N D \Sigma' \sin(\eta - \xi) , \tag{31}$$

$$\dot{h}_0 = -n g_0 D \Sigma' \sin(\eta - \xi) . \tag{32}$$

$$\mathrm{i} g \dot{\xi}_0 + g g_0^{-1} \dot{g}_0 = \mathrm{i} n [\Phi + g(G - \Delta)] . \tag{33}$$

$$\mathrm{i} h \dot{\eta}_0 + h h_0^{-1} \dot{h}_0 = \mathrm{i} n [\Psi + h(H - \chi)] , \tag{34}$$

где

$$D = g^2 \bar{g}^2 - h^2 \bar{h}^2 (w_N \bar{w}_N)^2 .$$

Заключение

В рамках общей планетной теории построена вековая система (22), описывающая вращательное движение твердотельной осесимметричной Луны. Решение этой системы представляется без вековых членов с использованием тригонометрического решения вековой системы (19), описывающей орбитальное движение больших планет и Луны, с интегралами (21) и (26). Для достижения современной точности наблюдений следует построить и решить вековую систему типа (22) для общего случая вращения трехосной твердотельной Луны. Для проведения аналитических операций над рядами Пуассона использовался пуассоновский процессор [3].

Работа выполнена в рамках программы 1.7 Президиума РАН.

Литература

1. *Brumberg V. A.* Analytical Techniques of Celestial Mechanics. — Springer, 1995. — 236 p.

2. *Брумберг В. А., Иванова Т. В.* О решении вековой системы уравнений движения Луны в тригонометрической форме // Бюлл. ИТА 1985. — Т. 15, № 8. — С. 424–439.

3. *Ivanova T. V.* PSP: A New Poisson Series Processor // Dynamics, Ephemerides and Astrometry of the Solar System, IAU Symposium 172 / Eds. Ferraz-Mello S., Morando B. and Arlot J.-E. — Kluwer 1996. — P. 283–284.

Trigonometric Theory of the Moon's Rotation (the Poisson Case)

T. V. Ivanova

The semi-analytical trigonometric theory of the rigid-body axially symmetrical Moon’s rotation is constructed in the form of the general planetary theory.

Keywords: the Moon’s rotation theory, the Poisson case, the Euler parameters, the secular system, the general planetary system.