

## Определение параболической орбиты в компланарном (близкомпланарном) случае

© В. Б. Кузнецов

ИПА РАН, г. Санкт-Петербург, Россия

### Реферат

Предложен алгоритм поиска решения для определения параболической орбиты в компланарном случае: когда плоскость искомой орбиты совпадает с плоскостью движения наблюдателя. Ситуация, когда все действие происходит в одной плоскости (компланарность), затрудняет определение орбиты. Так, в уравнении, связывающем между собой три топоцентрических расстояния, появляются особенности, не позволяющие выразить одно из них через два других. На практике этому случаю соответствуют близпараболические орбиты комет, имеющие очень малый наклон к плоскости эклиптики. В отличие от случая произвольного эксцентриситета, для определения параболической орбиты всегда достаточно трёх наблюдений.

Определение параболической орбиты сводится к решению системы алгебраических уравнений для двух безразмерных переменных. Алгоритм поиска решения компланарного случая является модификацией некомпланарного, описанного ранее. Он основывается на поиске минимумов целевой функции методом Нелдера – Мида по симплексу. Основные изменения связаны с переходом к другим переменным. Так, компоненты единичного вектора нормали к плоскости искомой орбиты были заменены на нормированные безразмерные топоцентрические расстояния. Это позволило избежать потери точности из-за малости значений координат  $\{N_{xs}, N_{ys}\}$  и при этом сохранить замкнутость и безразмерность области поиска. Другая важная замена связана с отказом от уравнения, связывающего три топоцентрических расстояния в пользу уравнения, не имеющего особенности в компланарном случае.

В качестве примера приведены результаты определения орбиты кометы C/1984 U1 Shoemaker с наклоном орбиты к плоскости эклиптики  $179.21^\circ$ . Показано, что использование обычной программы, предназначенной для некомпланарного случая, не позволяет найти искомую орбиту. Замена переменных, являющихся компонентами вектора нормали к орбите, на безразмерные топоцентрические расстояния позволяет получить решение, которое плохо представляет среднее наблюдение. И, наконец, отказ от использования условия компланарности радиус-векторов орбиты для связи между собой топоцентрических расстояний в пользу алгебраического выражения, не зависящего от наклона орбиты к плоскости эклиптики, позволяет определить орбиту с достаточной точностью.

**Ключевые слова:** параболическая орбита, плоскость эклиптики, метод Нелдера – Мида.

*Контакты для связи:* Кузнецов Владимир Борисович ([vb.kuznetsov@iaaras.ru](mailto:vb.kuznetsov@iaaras.ru)).

**Для цитирования:** Кузнецов В. Б. Определение параболической орбиты в компланарном (близкомпланарном) случае // Труды ИПА РАН. 2024. Вып. 70. С. 25–33.

<https://doi.org/10.32876/AplAstron.70.25-33>

## Determination of the Parabolic Orbit in Coplanar (Near-Coplanar) Case

V. B. Kuznetsov

Institute of Applied Astronomy of the Russian Academy of Sciences, Saint Petersburg, Russia

### Abstract

An algorithm for finding a solution for determining a parabolic orbit in the coplanar case is proposed, which takes place, when the plane of the orbit desired coincides with the motion plane of an observer. The case, when all the movements are occurring in the same plane, only complicates the orbit determination. So, in the equation that connected three topocentric distances it is singularity that appears. In practice, this case corresponds to near-parabolic comets whose orbits are placed with very small inclination to the ecliptic. The important difference of all the cases for the determination of parabolic orbit from the case with the arbitrary value of eccentricity, is that only three observations are needed to find it.

The determination of parabolic orbit is a solution of a system of algebraic equations for two dimensionless variables. The algorithm of the solution is the modification of the coplanar case, which was described earlier. It is based on the finding the minima of the objective function using the Nelder – Mead simplex algorithm. The main changes are connected with the replacement of variables. In such a case, the components of the normal vector to the plane of a desired orbit were replaced by normal dimensionless topocentric distances. It allowed to avoid the loss of precision owing to small values of coordinates and save the closed and dimensionless of search area. One more important thing is to substitute the coplanar equation that connected three topocentric distances by the equation without singularity in coplanar case.

The results of determining the orbit of C/1984 U1 Shoemaker comet, with 179.21° inclination of the orbit to ecliptic plane may serve an example. It has been demonstrated that the use of base algorithm for non-coplanar case does not allow to receive the orbit desired. The replacement of variables from components of normal vector by non-dimensional topocentric distances allows to obtain a solution, that poorly represents the average observation. Finally, the rejection of the coplanar equation that connected the topocentric distances on the algebraic expression without singularity allows to calculate the orbit with sufficient precision.

**Keywords:** parabolic orbit, plane of ecliptic, Nelder – Mead method.

*Contacts:* Vladimir B. Kuznetsov (vb.kuznetsov@iaaras.ru).

**For citation:** Kuznetsov V. B. Determination of the parabolic orbit in coplanar (near-coplanar) case // Transactions of IAA RAS. 2024. Vol. 70. P. 25–33.

<https://doi.org/10.32876/AplAstron.70.25-33>

## Введение

Данная статья является продолжением работ автора, посвящённых определению параболических орбит (Кузнецов, 2012; Кузнецов, 2016; Кузнецов, 2021). В них содержатся основные результаты, полученные за последние годы. Здесь из них приводится лишь необходимая информация, без которой невозможно понимание настоящей статьи.

В работе (Кузнецов, 2016) для определения предварительной параболической орбиты по трем наблюдениям, в моменты времени  $t_1$ ,  $t_2$  и  $t_3$ , был предложен метод алгебраических уравнений. Обозначим через  $\mathbf{r}_1$ ,  $\mathbf{r}_2$  и  $\mathbf{r}_3$  радиус-векторы искомой орбиты в соответствующие моменты времени. Тогда уравнения для гелиоцентрических радиус-векторов будут иметь следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{r}_1 &= \mathbf{e}_1 \rho_1 - \mathbf{R}_1 \\ \mathbf{r}_2 &= \mathbf{e}_2 \rho_2 - \mathbf{R}_2 \\ \mathbf{r}_3 &= \mathbf{e}_3 \rho_3 - \mathbf{R}_3 \end{aligned} \right\}, \quad (1)$$

где  $\mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{e}_2$  и  $\mathbf{e}_3$  — единичные векторы наблюдаемого направления на объект,  $\mathbf{R}_1$ ,  $\mathbf{R}_2$  и  $\mathbf{R}_3$  — векторы положения Солнца относительно топоцентра. Определение орбиты в некомпланарном случае сводится к решению системы двух уравнений относительно трёх топоцентрических расстояний до кометы. Используя соотношение, выражающее одно из них через два других, мы получим систему двух уравнений от двух неизвестных.

$$\left. \begin{aligned} f_1 &= \sqrt{r_1 \mp \sqrt{2(r_1 r_2 + \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2)}} + r_2 \times \\ &\times \left[ \sqrt{r_1 r_2 + \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2} + \frac{\sqrt{2}}{3} (r_1 \mp \sqrt{2(r_1 r_2 + \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2)} + r_2) \right] - \\ &- \tau_{21} - kL(\rho_1 - \rho_2) = 0 \\ f_2 &= \sqrt{r_2 \mp \sqrt{2(r_2 r_3 + \mathbf{r}_2 \mathbf{r}_3)}} + r_3 \times \\ &\times \left[ \sqrt{r_2 r_3 + \mathbf{r}_2 \mathbf{r}_3} + \frac{\sqrt{2}}{3} (r_2 \mp \sqrt{2(r_2 r_3 + \mathbf{r}_2 \mathbf{r}_3)} + r_3) \right] - \\ &- \tau_{32} - kL(\rho_2 - \rho_3) = 0 \end{aligned} \right\}, \quad (2)$$

где  $\tau_{21} = k(t_2 - t_1)$ ,  $\tau_{32} = k(t_3 - t_2)$ ,  $k = 0.01720209895$  — постоянная Гаусса,  $L = 0.00576832$  [сут/(а. е.)] —

абберационная постоянная. В « $\mp$ » верхний знак соответствует углу между векторами  $< \pi$ , а нижний  $> \pi$ . Стоит отметить, что в (2) только один из двух углов между векторами может быть  $> \pi$  и, следовательно, система уравнений (2) имеет три возможных варианта представления. Целью настоящей работы является построение алгоритма, аналогичного тому, что был представлен в работе (Кузнецов, 2021), для численного решения системы уравнений с нахождением всех возможных орбит в случае, когда наблюдаемое тело, движущееся по параболической орбите, и наблюдатель движутся в одной плоскости.

## Связь между радиус-векторами параболической орбиты

Как известно, для орбиты, не совпадающей с плоскостью эклиптики (некомпланарная орбита) векторы положения Солнца относительно топоцентра  $\mathbf{R}_i$  и радиус-векторы искомой орбиты  $\mathbf{r}_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) принадлежат разным плоскостям. В силу того, что искомая орбита плоская, радиус-векторы (1) связаны между собой уравнением компланарности, т. е. их смешанное произведение будет равно нулю:

$$\mathbf{r}_1(\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3) = 0. \quad (3)$$

Уравнение (3) позволяет выразить одно из топоцентрических расстояний через два других. Выразим  $\rho_2 \geq 0$  через  $\rho_1$  и  $\rho_3$ :

$$\rho_2 = \frac{[\mathbf{e}_1 \rho_1 - \mathbf{R}_1][(\mathbf{e}_3 \rho_3 - \mathbf{R}_3) \times \mathbf{R}_2]}{[\mathbf{e}_1 \rho_1 - \mathbf{R}_1][(\mathbf{e}_3 \rho_3 - \mathbf{R}_3) \times \mathbf{e}_2]} = \frac{\mathbf{r}_1(\mathbf{r}_3 \times \mathbf{R}_2)}{\mathbf{r}_1(\mathbf{r}_3 \times \mathbf{e}_2)} \geq 0. \quad (4)$$

В формуле (4) векторы в квадратных скобках перемножаются скалярно.

Выражение (4) не применимо для орбит, лежащих в плоскости эклиптики, где числитель и знаменатель тождественно равны нулю. В этом случае можно выразить  $\rho_2$  через  $\rho_1$  и  $\rho_3$  с помощью следующих уравнений, которые справедливы для параболических орбит с любыми наклонами (Кузнецов, 2016):

$$\left[ p(r_3^2 - \mathbf{r}_2\mathbf{r}_3) - r_3(r_2r_3 - \mathbf{r}_2\mathbf{r}_3) \right]^2 - p(2r_3 - p)(r_2^2r_3^2 - (\mathbf{r}_2\mathbf{r}_3)^2) = 0, \quad (5)$$

$$\left[ p(r_1^2 - \mathbf{r}_1\mathbf{r}_2) - r_1(r_1r_2 - \mathbf{r}_1\mathbf{r}_2) \right]^2 - p(2r_1 - p)(r_1^2r_2^2 - (\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2)^2) = 0, \quad (6)$$

где  $r_i = |\mathbf{r}_i|$  ( $i = 1, 2, 3$ ),  $p$  — параметр параболической орбиты. Параметр орбиты  $p$  определяется по двум радиус-векторам ([Lagrange, 1778](#)), в нашем случае  $\mathbf{r}_1$  и  $\mathbf{r}_3$  а, как следствие из (1), являющимися функциями от  $\rho_1$  и  $\rho_3$ :

$$p = \frac{r_1r_3 - \mathbf{r}_1\mathbf{r}_3}{r_1 \mp \sqrt{2(r_1r_3 + \mathbf{r}_1\mathbf{r}_3)} + r_3} \geq 0, \quad (7)$$

где знак « $\mp$ » определяется как в (2).

Возводя (5) и (6) в квадрат, их можно привести к полиномам четвёртой степени относительно  $\rho_2$ . От двух уравнений четвертой степени можно перейти к одному кубическому уравнению:

$$a_3\rho_2^3 + a_2\rho_2^2 + a_1\rho_2 + a_0 = 0. \quad (8)$$

Коэффициенты  $a_i$  ( $i = 0, 1, 2, 3$ ) будут определяться как:

$$\left. \begin{aligned} a_3 &= (p^2 - (r_1 + r_3)p + \xi\zeta + r_1r_3)(\xi(p - r_1) + \zeta(p - r_3)) \\ a_2 &= b_3p^3 + b_2p^2 + b_1p + b_0 \\ a_1 &= c_3p^3 + c_2p^2 + c_1p + c_0 \\ a_0 &= d_3p^3 + d_2p^2 + d_1p + d_0 \end{aligned} \right\}. \quad (9)$$

$$\left. \begin{aligned} b_3 &= r_3^2 - r_1^2 - 2(\mathbf{e}_2\mathbf{R}_2)(\xi + \zeta) - (v + \eta) \\ b_2 &= 2(r_1^2r_3 - r_1r_3^2) + (r_1 + 2r_3)(2(\mathbf{e}_2\mathbf{R}_2)\zeta + v) + (2r_1 + r_3)(2(\mathbf{e}_2\mathbf{R}_2)\xi + \eta) \\ b_1 &= r_3^2(\zeta^2 - 2(\mathbf{e}_2\mathbf{R}_2)\zeta - v) - r_1^2(\xi^2 + 2(\mathbf{e}_2\mathbf{R}_2)\xi + \eta) - 2r_1r_3(v + 2(\mathbf{e}_2\mathbf{R}_2)(\xi + \zeta) + \eta) - \\ &\quad - \xi v(2\zeta + \xi) - \zeta\eta(2\xi + \zeta) \\ b_0 &= r_1^2r_3(2(\mathbf{e}_2\mathbf{R}_2)\xi + \eta) + r_1r_3^2(2(\mathbf{e}_2\mathbf{R}_2)\zeta + v) + r_1\xi(\xi v + 2\zeta\eta) + r_3\zeta(\zeta\eta + 2\xi v) \\ c_3 &= r_1^2(2(\mathbf{e}_2\mathbf{R}_2) - \xi) - r_3^2(2(\mathbf{e}_2\mathbf{R}_2) + \zeta) + R_2^2(\xi + \zeta) + 2(\mathbf{e}_2\mathbf{R}_2)(v + \eta) \\ c_2 &= 4r_1r_3(r_3 - r_1)(\mathbf{e}_2\mathbf{R}_2) + r_1r_3(r_1\xi + r_3\zeta) - r_1(R_2^2(2\xi + \zeta) + 2(\mathbf{e}_2\mathbf{R}_2)(v + 2\eta)) - \\ &\quad - r_3(R_2^2(\xi + 2\zeta) + 2(\mathbf{e}_2\mathbf{R}_2)(2v + \eta)) \\ c_1 &= r_1^2(R_2^2\xi + 2(\mathbf{e}_2\mathbf{R}_2)\eta + 2\xi\eta) + r_3^2(R_2^2\zeta + 2(\mathbf{e}_2\mathbf{R}_2)v - 2\zeta v) + \\ &\quad + 2r_1r_3(R_2^2(\xi + \zeta) + 2(\mathbf{e}_2\mathbf{R}_2)(v + \eta)) + \xi v^2 + \zeta\eta^2 + 2v\eta(\xi + \zeta) \\ c_0 &= -r_1^2r_3(R_2^2\xi + 2(\mathbf{e}_2\mathbf{R}_2)\eta) - r_1r_3^2(R_2^2\zeta + 2(\mathbf{e}_2\mathbf{R}_2)v) - r_1\eta(2\xi v + \zeta\eta) - r_3v(2\zeta\eta + \xi v) \\ d_3 &= r_1^2(\eta - R_2^2) + r_3^2(v + R_2^2) - R_2^2(v + \eta) \\ d_2 &= r_1r_3(r_1(2R_2^2 - \eta) - r_3(2R_2^2 + v)) + R_2^2(r_1(v + 2\eta) + r_3(2v + \eta)) \\ d_1 &= r_3^2v(v - R_2^2) - r_1^2\eta(\eta + R_2^2) - (v + \eta)(2R_2^2r_1r_3 + v\eta) \\ d_0 &= (R_2^2r_1r_3 + v\eta)(r_1\eta + r_3v) \end{aligned} \right\}.$$

Здесь

$$\left. \begin{aligned} \xi &= (\mathbf{e}_2\mathbf{R}_3) - (\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3)\rho_3, & \zeta &= (\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2)\rho_1 - (\mathbf{e}_2\mathbf{R}_1) \\ v &= (\mathbf{e}_1\mathbf{R}_2)\rho_1 - (\mathbf{R}_1\mathbf{R}_2)\rho_3, & \eta &= (\mathbf{R}_2\mathbf{R}_3) - (\mathbf{e}_3\mathbf{R}_2)\rho_3 \end{aligned} \right\}. \quad (10)$$

Решая кубическое уравнение (8) относительно  $\rho_2$ , можно получить до трёх решений. При наличии более чем одного неотрицательного решения необходимо провести выбор наилучшего. В таком случае для каждого решения находим общее значение параметра  $p$  по трём радиус-векторам (без ограничения по эксцентриситету орбиты) ([Stumpff, 1959](#)):

$$p = \frac{\pm r_1|\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3| \mp r_2|\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_3| \pm r_3|\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2|}{\pm |\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3| \mp |\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_3| \pm |\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2|} \geq 0, \quad (11)$$

где верхние и нижние знаки  $\pm$  и  $\mp$  в (11) соответствуют положительным и отрицательным знакам синуса угла между векторами в последующем векторном произведении. Далее сравниваем его со значением, полученным для параболической орбиты (7). Минимальная по модулю разность будет указывать на лучшее решение.

Коэффициенты  $b_i$ ,  $c_i$ ,  $d_i$ , ( $i = 0, 1, 2, 3$ ) определяются как:

Система уравнений (2) зависит от трёх переменных:  $\rho_1$ ,  $\rho_2$  и  $\rho_3$ . Если мы подставим решение уравнения (8) в (2), то получим систему из двух алгебраических уравнений относительно двух неизвестных  $\rho_1$  и  $\rho_3$ . При этом ввиду нелинейности системы (2) возможно появление нескольких решений.

### Переход к новым переменным

Топоцентрические расстояния  $\rho_1$  и  $\rho_3$  могут принимать только положительные значения. Таким образом, область искомых решений представляет собой открытый квадрант, который нужно ограничить максимальными значениями. Для этого в работе (Кузнецов, 2021) предлагалось перейти к нормированным безразмерным переменным. В качестве новых переменных рассматривались компоненты единичного вектора  $\mathbf{N} = (N_x, N_y, N_z)$ , представляющего собой вектор нормали к плоскости искомой орбиты. Для компланарных орбит это не подходит, так как плоскость орбиты уже известна.

Перейдём к нормированным безразмерным переменным  $\rho_1^n$  и  $\rho_3^n$ , определённым на интервале  $[0, 1]$ . С топоцентрическими расстояниями они связаны следующим образом:

$$\rho_1^n = \frac{1}{\rho_1 + 1}, \quad \rho_3^n = \frac{1}{\rho_3 + 1}, \quad \rho_1 = \frac{1 - \rho_1^n}{\rho_1^n}, \quad \rho_3 = \frac{1 - \rho_3^n}{\rho_3^n}. \quad (12)$$

От открытого квадранта мы переходим к единичному квадранту. Из него следует исключить области с отрицательными величинами топоцентрического расстояния  $\rho_2$  и параметра орбиты  $p$  из (7). Введение таких ограничений позволяет сузить поиск решения со всего единичного квадрата до его отдельных областей.

### Порядок положений объекта на орбите

При решении, как правило, не учитывается порядок точек пересечения лучей зрения (наблюдений) с орбитой. Отсюда возможно появление решений, для которых порядок соответствующих точек орбиты не соответствует хронологическому. Для их контроля можно воспользоваться следующими условиями:

$$0.99999 \leq \left| \frac{\Delta\theta_{31}}{\Delta\theta_{21} + \Delta\theta_{32}} \right| \leq 1.00001, \quad (13)$$

где  $\Delta\theta_{ij}$  величины углов (в радианах) между  $\mathbf{r}_i$  и  $\mathbf{r}_j$ .

### Особые точки в области поиска

Как и в случае топоцентрических расстояний  $\{\rho_1, \rho_3\}$ , для безразмерных переменных  $\{\rho_1^n, \rho_3^n\}$  существуют особые точки, в которых  $\rho_2$  из (4) становится неопределённым. В новых переменных уравнение (4) примет вид:

$$\rho_2 = \frac{[\mathbf{e}_1(1 - \rho_1^n) - \mathbf{R}_1\rho_1^n][(\mathbf{e}_3(1 - \rho_3^n) - \mathbf{R}_3\rho_3^n) \times \mathbf{R}_2]}{[\mathbf{e}_1(1 - \rho_1^n) - \mathbf{R}_1\rho_1^n][(\mathbf{e}_3(1 - \rho_3^n) - \mathbf{R}_3\rho_3^n) \times \mathbf{e}_2]} \geq 0. \quad (14)$$

Для строго компланарного случая числитель и знаменатель будут тождественно равны нулю для всех  $\rho_1^n$  и  $\rho_3^n$ , и вопрос об особых точках можно дальше не рассматривать. С практической точки зрения строго компланарный случай очень редок, поэтому для орбит с очень малым наклоном, несмотря на низкую точность, уравнение (14) может быть использовано для разбиения нашего единичного квадранта на области поиска решений. В зависимости от того, обращается числитель или знаменатель в ноль, значение топоцентрического расстояния может стать либо бесконечно малым, либо бесконечно большим. К тому же, положительность расстояний требует одного знака для числителя и знаменателя. Приравнивая числитель и знаменатель нулю, мы получаем систему из двух уравнений сводимую к одному квадратному. Таким образом, на нашей единичной области может быть одна или две особые точки, минимальные и максимальные координаты которых позволят нам ограничить на нашем квадрате прямоугольную область с возможно наиболее плотным расположением искомых решений системы (2), которая требует более плотной триангуляции, чем остальная часть единичного квадрата.

### Целевая функция

Решение системы (2) предлагается искать в виде минимума целевой функции

$$f_{goal}(\rho_1^n, \rho_3^n) = f_1^2(\rho_1^n, \rho_3^n) + f_2^2(\rho_1^n, \rho_3^n). \quad (15)$$

Причем поиск основывается на использовании триангуляции, т. е. на разбиении области возможных решений на непересекающиеся треугольники (Самотохин, Хуторовский 2014). Эти треугольники необходимы как начальное приближение для переменных симплексов — подвижных треугольников, по которым производится поиск минимума целевой функции методом Нелдера — Мида (Химмельблау, 1975, с. 163–173). Дальнейшая процедура поиска решений системы (2) практически не отличается от той, что была уже изложена ранее (Кузнецов, 2021).

### Пример 1

В качестве первого численного примера рассмотрим определение орбиты кометы C/1984 U1 Shoemaker на короткой дуге. Это комета с близпараболической орбитой ( $e = 0.995$ ) с обратным направлением движения ( $i = 179.21^\circ$ ) и наклоном орбиты менее  $1^\circ$  к плоскости эклиптики.

Таблица 1

Наблюдения кометы C/1984 U1 Shoemaker

$t$ (UT), год, месяц, день	$\alpha$ (2000), час, мин, с	$\delta$ (2000), град, мин, с	Обсерватория
1984 10 23.45625	03 27 44.67	+18 42 25.6	Palomar Mountain
1984 11 24.34653	02 43 35.01	+15 38 40.8	Palomar Mountain
1984 12 27.00385	02 08 13.66	+12 42 58.6	Oak Ridge Observatory

Здесь:  $t$  — всемирное время (год, месяц, день);  $\alpha$  — прямое восхождение (часы, минуты, секунды) и  $\delta$  — склонение кометы (градусы, минуты, секунды), представленные в экваториальной системе координат, отнесённые к экватору на эпоху J2000.0.

Сначала попробуем определить методом, предложенным в статье (Кузнецов, 2021). Обозначим его как «вариант 1». Орбитам с малым наклоном к эклиптике соответствует область вблизи центра «большого квадрата», вокруг точки  $\{N_{xs} = 0, N_{ys} = 0\}$ . Для этой области построим графики (2) в координатах по осям  $N_{xs}$  и  $N_{ys}$ . Закрасим серым цветом области с отрицательными величинами топоцентрического расстояния  $\rho_2$  и параметра орбиты  $p$ , а также там, где условие (13) не выполняется, соответственно, области возможных решений будут окрашены белым (рис. 1).

На рис. 1 показана треугольная область возможных решений для близэклиптических орбит. Здесь имеется только одно решение  $\{N_{xs} = -0.000510, N_{ys} = 0.002556\}$  — одна точка пересечения кривых  $f_1$  и  $f_2$ . Этому решению соответствует следующая орбита: обозначим её по используемым координатам  $\{N_{xs}, N_{ys}\}$ , а реальную орбиту, полученную международным планетным центром, — как «MPC» (MPC, 2023).

Полученная нами орбита не имеет ничего общего с искомой орбитой кометы, хотя она и имеет малый наклон к эклиптике, но её движение прямое, а не обратное. Представление наблюдений кометы орбитой это подтверждает.

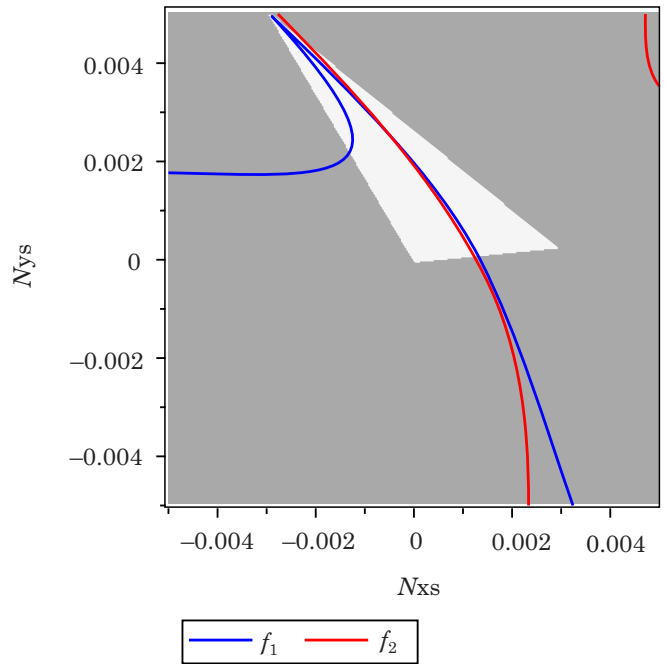


Рис. 1. Графики уравнений (2) для кометы C/1984 U1 Shoemaker (вариант 1); центральная область

Таблица 2

Элементы параболической орбиты C/1984 U1 Shoemaker (вариант 1)

Орбита	$T_0$ , год, месяц, день	$q$ , а. е.	$i$ , °	$\omega$ , °	$\Omega$ , °
« $N_{xs}, N_{ys}$ »	1985 03 15.11	0.9071	0.1493	317.9375	191.2893
MPC	1984 09 17.00	5.4892	179.2123	182.8308	238.3009

Таблица 3

Представление наблюдений кометы C/1984 U1 Shoemaker, (O-C), (вариант 1)

Орбита	$t_1$		$t_2$		$t_3$	
	$\Delta\alpha$ , "	$\Delta\delta$ , "	$\Delta\alpha$ , "	$\Delta\delta$ , "	$\Delta\alpha$ , "	$\Delta\delta$ , "
« $N_{xs}, N_{ys}$ »	56.07	14.24	-9286.60	-2836.89	-202.94	-72.45

Элементы параболической орбиты C/1984 U1 Shoemaker (вариант 2)

Орбита	$T_0$ , год, месяц, день	$q$ , а. е.	$i$ , °	$\omega$ , °	$\Omega$ , °
«1»	1984 06 10.53	3.0195	4.2714	141.2609	226.2064
«2»	1984 09 23.36	3.0806	1.5965	169.1566	223.4897
«3»	1984 07 19.93	5.4289	179.2080	177.6985	238.2312
«4»	1985 01 03.97	5.2877	179.1429	195.2526	237.4286
«5»	1985 03 15.11	0.9071	0.1493	317.9375	191.2893
«6»	1985 01 17.08	0.9131	0.0741	33.6172	93.0353
MPC	1984 09 17.00	5.4892	179.2123	182.8308	238.3009

Очевидно, что выбор координат вектора нормали в качестве переменных для определения близэллиптических орбит неудачен. Рассмотрим вместо них в качестве «варианта 2» топоцентрические расстояния (Кузнецов, 2016). Для удобства поиска решений в закрытой области перейдем от топоцентрических расстояний  $\rho_1$  и  $\rho_3$  к нормированным величинам  $\rho_1^n$  и  $\rho_3^n$  по формулам (12).

Здесь имеются две области возможных решений с одной общей точкой  $\{\rho_1^n = 0.147, \rho_3^n = 0.135\}$ , являющейся решением числителя и знаменателя уравнения (14). Все возможные решения собраны в верхней области. Поиск решений методом Нелдера – Мида даст нам результаты, представленные в табл. 4.

Всего в табл. 4 имеется 6 решений, что вдвое превышает число корней, представленных на рис. 2. Решения «3» и «4» показаны на рис. 2*b*, «5» — на рис. 2*a*. Остальные решения являются локальными минимумами целевой функции. Решения «3» и «4» наиболее близки к искомой орбите. Решение «5» совпадает с решением, представленным в табл. 2. Решение «6» представляет собой орбиту столкновения с наблюдателем в момент последнего наблюдения.

Представление наблюдений кометы орбитами представлено в табл. 5. Как видно из табл. 5, наилучшим образом наблюдения представляет орбита «3», но и она заметно расходится со вторым наблюдением.

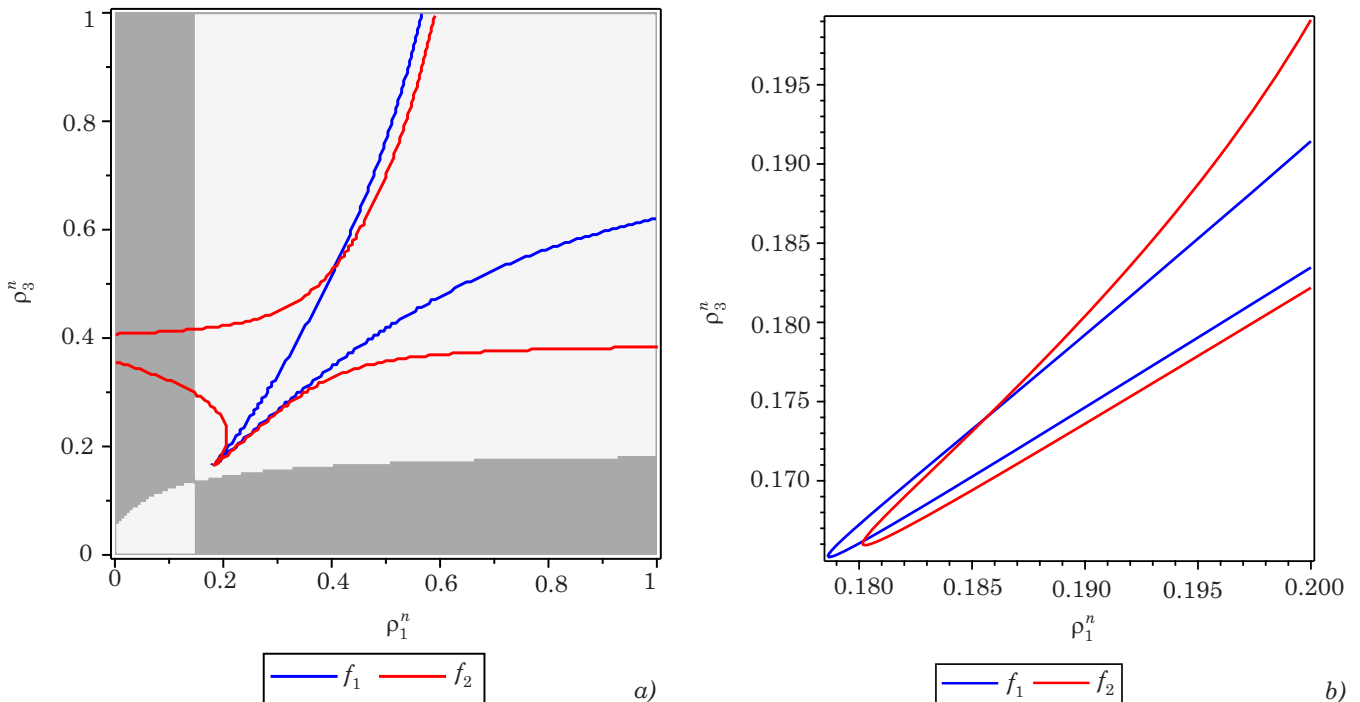


Рис. 2 Области возможных решений (2) для кометы C/1984 U1 Shoemaker (вариант 2)

Таблица 5

Представление наблюдений кометы C/1984 U1 Shoemaker, (O-C), (вариант 2)

Орбита	$t_1$		$t_2$		$t_3$	
	$\Delta\alpha, ''$	$\Delta\delta, ''$	$\Delta\alpha, ''$	$\Delta\delta, ''$	$\Delta\alpha, ''$	$\Delta\delta, ''$
«1»	$4.27 \cdot 10^4$	$9.90 \cdot 10^3$	$2.68 \cdot 10^4$	$8.82 \cdot 10^3$	$-2.92 \cdot 10^4$	$-7.88 \cdot 10^3$
«2»	$3.89 \cdot 10^4$	$1.01 \cdot 10^4$	$3.04 \cdot 10^4$	$1.01 \cdot 10^4$	$-2.49 \cdot 10^4$	$-7.72 \cdot 10^3$
«3»	-35.56	-9.53	737.30	232.00	23.75	9.00
«4»	$-2.69 \cdot 10^3$	-710.50	$-8.65 \cdot 10^3$	$-2.64 \cdot 10^3$	$1.79 \cdot 10^3$	674.80
«5»	56.07	14.24	$-9.25 \cdot 10^3$	$-2.84 \cdot 10^3$	-202.90	-72.45
«6»	-61.41	-159.50	$-6.32 \cdot 10^4$	$-1.68 \cdot 10^4$	-	-

Наконец, обратимся к замене в «варианте 2» формулы (4) на решение уравнения (8). Обозначим этот случай как «вариант 3». На рис. 3а видно, что здесь изменились как области возможных решений, так и кривые  $f_1$  и  $f_2$ . Отказ от использова-

ния уравнения (14) приводит нас к единой триангуляции единичного квадрата треугольниками одинакового размера (рис. 3б).

В результате поиска получим решения, которые можно видеть в табл. 6.

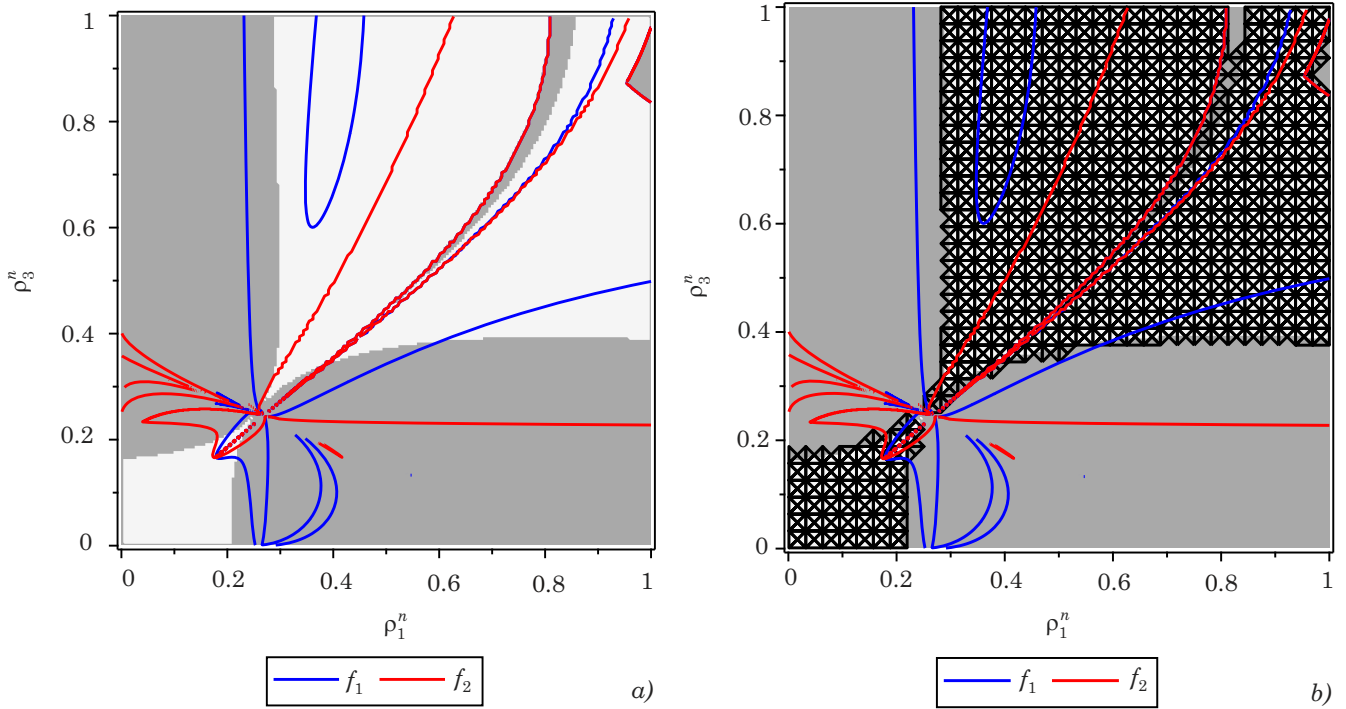


Рис. 3. Области возможных решений (2) и их триангуляция для кометы C/1984 U1 Shoemaker (вариант 3)

Таблица 6

Элементы параболической орбиты C/1984 U1 Shoemaker (вариант 3)

Орбита	$T_0$ , год, месяц, день	$q$ , а. е.	$i, ^\circ$	$\omega, ^\circ$	$\Omega, ^\circ$
«1»	1984 09 02.98	5.4904	179.2113	182.7581	238.2965
«2»	1985 02 15.82	0.9904	0.0892	326.3157	168.7690
«3»	1984 11 28.59	0.9860	0.0179	248.5004	178.0077
МРС	1984 09 17.00	5.4892	179.2123	182.8308	238.3009

Таблица 7

Представление наблюдений кометы C/1984 U1 Shoemaker, (O-C), (вариант 3)

Орбита	$t_1$		$t_2$		$t_3$	
	$\Delta\alpha$ , "	$\Delta\delta$ , "	$\Delta\alpha$ , "	$\Delta\delta$ , "	$\Delta\alpha$ , "	$\Delta\delta$ , "
«1»	$-3.82 \cdot 10^{-3}$	$-1.02 \cdot 10^{-3}$	-0.29	0.88	$2.56 \cdot 10^{-3}$	$9.65 \cdot 10^{-4}$
«2»	115.70	30.34	$1.32 \cdot 10^3$	399.30	$2.97 \cdot 10^3$	$1.06 \cdot 10^3$
«3»	-	$1.56 \cdot 10^5$	$-1.14 \cdot 10^6$	$5.95 \cdot 10^4$	-	$-3.13 \cdot 10^4$

Из табл. 6 видно, что из трёх имеющихся решений два представляют прямое движение и лишь одно обратное — «1», которое хорошо соответствует орбите «MPC». Представление наблюдений кометы орбитами выглядит так, как показано в табл. 7.

Данные в табл. 7 подтверждают, что решение «1» наилучшее из возможных во всех трёх вариантах. Его сравнение с решением «3» в табл. 5 демонстрирует важность замены формулы (4) на решение уравнения (8).

На данном примере численно показано, каким образом можно определить параболическую орбиту, плоскость которой совпадает или почти совпадает с плоскостью эклиптики. Интервалы в 1 месяц между наблюдениями взяты для демонстрации графиков функций (2) на области поиска решений. На деле они могут быть гораздо меньше.

Результаты для интервалов между наблюдениями в несколько суток графически менее наглядны и приведены в следующем примере.

### Пример 2

В качестве второго численного примера рассмотрим определение орбиты той же кометы по дуге в 8 суток (табл. 8).

В результате поиска по последней методике (вариант 3) получим решения, представленные в табл. 9.

Из табл. 9 видно, что из четырёх имеющихся решений три представляют прямое движение и лишь одно — обратное — «1», оно хорошо соответствует орбите «MPC». Представление наблюдений кометы орбитами выглядит так, как показано в табл. 10.

Таблица 8

Наблюдения кометы C/1984 U1 Shoemaker

$t$ (UT), год, месяц, день	$\alpha$ (2000), час, мин, с	$\delta$ (2000), град, мин, с	Обсерватория
1984 10 23.45625	3 27 44.67	+18 42 25.6	Palomar Mountain
1984 10 26.38889	3 23 45.78	+18 27 35.6	Palomar Mountain
1984 11 01.31319	3 15 32.88	+17 55 51.4	Lowell Observatory

Таблица 9

Элементы параболической орбиты C/1984 U1 Shoemaker (вариант 3)

Орбита	$T_0$ , год, месяц, день	$q$ , а. е.	$i$ , °	$\omega$ , °	$\Omega$ , °
«1»	1984 08 12.81	5.4780	179.2244	180.5930	238.4361
«2»	1984 12 06.07	0.2322	0.2660	122.6402	38.7831
«3»	1984 08 05.47	1.0328	0.1431	127.8554	197.3386
«4»	1984 12 06.10	0.2338	0.2649	122.4238	38.7810
MPC	1984 09 17.00	5.4892	179.2123	182.8308	238.3009

Таблица 10

Представление наблюдений кометы C/1984 U1 Shoemaker, (O-C), (вариант 3)

Орбита	$t_1$		$t_2$		$t_3$	
	$\Delta\alpha$ , "	$\Delta\delta$ , "	$\Delta\alpha$ , "	$\Delta\delta$ , "	$\Delta\alpha$ , "	$\Delta\delta$ , "
«1»	$-0.15 \cdot 10^{-3}$	$-0.39 \cdot 10^{-4}$	-0.19	0.69	$1.41 \cdot 10^{-3}$	$0.40 \cdot 10^{-4}$
«2»	$-0.29 \cdot 10^3$	$-0.70 \cdot 10^2$	$0.11 \cdot 10^4$	$0.27 \cdot 10^3$	-	-
«3»	$-0.94 \cdot 10^2$	$-0.23 \cdot 10^2$	$0.32 \cdot 10^3$	$0.86 \cdot 10^2$	$0.76 \cdot 10^2$	$0.20 \cdot 10^2$
«4»	$-0.34 \cdot 10^3$	$-0.81 \cdot 10^2$	$0.11 \cdot 10^4$	$0.26 \cdot 10^3$	-	-



Данные в табл. 10 подтверждают, что решение «1» наилучшее из возможных во всех четырёх вариантах. Отсутствие данных по третьему наблюдению для орбит «2» и «4» связано с тем, что в этот момент комета должна столкнуться с Землей.

Для определения орбиты на интервалах времени менее одних суток лучше воспользоваться методом Лапласа, описанным в работе ([Кузнецов, 2012](#)).

### Заключение

Представленный в статье метод демонстрирует эффективный подход к численному решению системы алгебраических уравнений для определения параболической орбиты в компланарном случае, хотя не ограничивается только им, сохраняя все возможности родительского метода ([Кузнецов, 2021](#)), и при желании может быть применён к определению любых параболических орбит. Он базируется на двух принципах. Во-первых, переход от безразмерных величин, определяющих ориентацию орбиты, к нормированным топоцентрическим расстояниям в качестве неизвестных позволяет повысить точность получаемых решений. Во-вторых, отказ от использования условия компланарности радиус-векторов орбиты для связи между собой топоцентрических расстояний в пользу алгебраического выражения, не зависящего от наклона орбиты к плоскости эклиптики, позволяет повысить точность искомого решения.

### Литература

*Кузнецов В. Б.* Определение параболической орбиты для тела, движущегося в плоскости эклиптики, с помощью метода Лапласа // *Астрономический вестник*. 2012. Т. 46, № 2. С. 149–156.

*Кузнецов В. Б.* Определение параболической орбиты. Сравнение методов Ольберса и алгебраических уравнений // *Астрономический вестник*. 2016. Т. 50, № 3. С. 1–9.

*Кузнецов В. Б.* Определение параболической орбиты. Поиск решения в методе алгебраических уравнений // *Астрономический вестник*. 2021. Т. 55, № 4. С. 359–367.

*Самотохин А. С., Хуторовский З. Н.* Метод первоначального определения параметров околоземных орбит по трем угловым измерениям // *Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша*. 2014. № 44. 31 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2014-44> (дата обращения 05.05.2024).

*Химмельблау Д.* Прикладное нелинейное программирование. М.: Мир, 1975. 536 с.

*Lagrange J. L.* Sur le probleme de la determination des orbites des cometes, d'apres trois observations. *Nouv. Mem. Acad. Roy. Sci. et Belles-Lettres*. Berlin, 1778.

*Stumpff K.* *Himmelsmechanik*. Bd. 1. Berlin, 1959. 682 p.

The International Astronomical Union. Minor Planet Center, 2023 [Электронный ресурс] URL: [https://min.orplanetcenter.net/db\\_search/show\\_object?utf8=%E2%9C%93&object\\_id=C%2F1984+U1](https://min.orplanetcenter.net/db_search/show_object?utf8=%E2%9C%93&object_id=C%2F1984+U1) (дата обращения 05.05.2024).