Определение орбиты небесного тела

© Ю. Д. Медведев[1], Д. А. Булекбаев[2]

[1]ИПА РАН, г. Санкт-Петербург, Россия
[2]ВКА им. А. Ф. Можайского, г. Санкт-Петербург, Россия

Реферат

В статье описаны основные этапы определения орбиты небесного тела по его наблюдениям. Выявлены основные трудности, которые могут возникнуть при уточнении орбиты исследуемого тела. Отмечено, что определение орбиты можно рассматривать как краевую задачу, где краевыми условиями являются наблюдения небесного тела. Определение первоначальной орбиты выполнено по формулам, специально разработанным Ю. В. Батраковым для орбит ИСЗ. Приведен пример расчета орбиты ИСЗ. Дана схема вывода основных формул улучшения параметров орбиты. Обращает на себя внимание возможность быстрого роста значений элементов матрицы изохронных производных, элементами которой являются частные производные от текущих параметров движения по их начальным значениям (матрицант) при их вычислениях на большие интервалы времени. Для устранения этой особенности предложено использовать свойство матрицанта, которое заключается в том что произведение матрицантов, вычисленных на подынтервалах, равно значению матрицанта на интервале. Отмечено, что если используется одношаговый метод интегрирования, то оптимально сократить длину подынтервала интервала до минимально возможного — до длины шага интегрирования уравнений движения. Численные эксперименты показали, что использование такой схемы вычисления матрицанта позволяет значительно сократить время вычисления при уточнении орбиты. Отмечается также, что выбор эпохи начальных параметров орбиты позволяет повысить обусловленность нормальной системы уравнений, получаемой при улучшении орбиты.

Ключевые слова: определение предварительной орбиты, улучшение орбиты.

Контакты: Медведев Юрий Дмитриевич (medvedev@iaaras.ru).
Статья поступила в редакцию 23.09.2020, принята к публикации 29.09.2020, опубликована 30.10.2020.

Для цитирования: Медведев Ю. Д., Булекбаев Д. А. Определение орбиты небесного тела // Труды ИПА РАН. 2020. Вып. 54. С. 63–70.
https://doi.org/10.32876/ApplAstron.54.63-70

Determination of a Celestial Body Orbit

Yu. D. Medvedev[1], D. A. Bulekbaev[2]

[1]Institute of Applied Astronomy of the Russian Academy of Sciences, Saint Petersburg, Russia
[2]Mozhaysky Military Space Academy, Saint Petersburg, Russia

Abstract

The paper describes the main stages of determining a celestial body orbit from its observations. The main difficulties that arise when improving a celestial body orbit are considered. Attention is drawn to the fact that the orbit determination can be considered as a boundary value problem, where the boundary conditions are observations of a celestial body. We determine the initial orbit using formulas specially developed by Yu. V. Batrakov for satellite orbits. An example of calculating the orbit of an artificial satellite is given. The case when there are three positional observations made from three points with a small time interval between observations is considered. A scheme for deriving the main formulas for improving the orbit parameters is presented. We pay attention to the possibility of a rapid increase in the values in the right-hand sides of the differential equations for the matrix of isochronous derivatives, whose elements are the partial derivatives of the current parameters of motion by their initial values (matrizant). It is proposed to use the property of the matrizant, which is that the product of the matrizant calculated on subintervals is equal to the value of the matrizant in the interval. We reduce the length of the interval subinterval to the possible minimum — to the length of the integration step for the equations of motion if a one-step integration method is used. Numerical experiments have shown that this can significantly reduce the computation time while improving the orbit. We note that the choice of the epoch of the initial parameters enables us to increase the conditionality of the normal system when improving the orbit.

Keywords: determination of preliminary orbit, improvement of orbit.

Contacts: Yuri D. Medvedev (medvedev@iaaras.ru).
Received 23 September, 2020, accepted 29 September, 2020, published 30 October, 2020

For citation: Medvedev Yu. D., Bulekbaev D. A. Determination of a celestial body orbit // Transactions of IAA RAS. 2020. Iss. 54. P. 63–70.
https://doi.org/10.32876/ApplAstron.54.63-70

Введение

Проблема определения орбиты небесного тела по-прежнему очень актуальна. Оперативное уточнение орбит небесных тел, в том числе баллистических ракет и ИСЗ, до сих пор остается важной и трудной задачей.

Цель данной статьи — представить задачу определения орбиты в виде математической модели с учетом ее основных аспектов. Авторы надеются, что такой подход к изложению позволит читателю получить достаточно полное представление о проблеме и ее трудностях. Для более подробного изложения авторы рекомендуют монографии [1–4], а также статью [5].

Постановка задачи

Задача определения орбиты неизвестного небесного тела математически может быть описана следующим образом.

Имеется система дифференциальных уравнений — уравнений движения:

$$\ddot{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{F}\big(t, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{g}(t)\big), \tag{1.1}$$

где $\boldsymbol{F}$ — векторная функция ускорений, действующих на небесное тело, $\boldsymbol{y} = \big(y_1(t),\ y_2(t), \dots,\ y_6(t)\big)$ — вектор состояния системы (1.1), компонентами которого, как правило, являются текущие координаты и компоненты скорости тела, $\boldsymbol{a}$ — вектор параметров, влияющих на движение, которые требуют улучшения. К таким параметрам могут относиться массы возмущающих тел, форма и масса исследуемого тела, параметры атмосферы и т. п. Через $\boldsymbol{g}(t)$ в (1.1) обозначена реактивная тяга, если объект рассматривается на активной фазе полета.

Для расчета $\boldsymbol{y}$ на заданные моменты времени нужно знать начальные значения: $\boldsymbol{y_0} = \boldsymbol{y}(t_0)$, параметры вектора $\boldsymbol{a}$ и закон изменения компонент вектора $\boldsymbol{g}(t)$. В случае когда начальные параметры и векторная функция $\boldsymbol{F}$ известны, задача нахождения значений неизвестных функций $\boldsymbol{y} = \big(y_1(t), y_2(t), \dots, y_6(t)\big)$ может быть получена численным интегрированием. В этом случае задача не вызывает трудностей, за исключением численного интегрирования уравнений (1.1) на большие интервалы времени, когда возникают проблемы накопления ошибок интегрирования и округлений.

Задачу, в которой начальные значения компонент вектора $\boldsymbol{y}$, а также $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{g}(t)$, неизвестны либо известны приближенно, приходится решать последовательными приближениями, т. е. определять приближенные значения этих величин, а затем их уточнять. Здесь нужно отметить, что вместо начальных значений компонент векторов положения и скорости можно определять (улучшать) оскулирующие элементы орбит небесного тела на фиксированный момент времени t_0 (оскулирующими элементами орбиты называются элементы такой орбиты, по которой двигалось бы тело, при условии, что возмущающие ускорения стали бы равными нулю).

Для определения неизвестных параметров движения необходимо иметь наблюдения, то есть измерения наблюдаемых положений или скорости движения тела. Измерения могут быть различными. Часто, например, измеряются угловые положения тела на небесной сфере, которые задаются углами α и δ (прямым восхождением и склонением) или A и h (азимутом и угловой высотой). Траекторные измерения могут давать также расстояние до объекта или его доплеровскую скорость (скорость тела вдоль луча зрения). Возможны и другие типы наблюдений.

Будем предполагать, что мы имеем n измерений $O_i + \varepsilon_i$, $i = \overline{1,n}$ на моменты времени $t_1, t_2, \dots, t_n$, где ε_i — ошибки измерений. Наблюдения позволяют составить n уравнений вида:

$$C\big(t_i, \boldsymbol{y}(t_i), \boldsymbol{a}, \boldsymbol{g}(t)\big) = O_i + \varepsilon_i, \tag{1.2}$$

где C — известная функция от $\boldsymbol{y}(t_i)$, параметров вектора $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{g}(t)$.

Таким образом, решение задачи определения орбиты можно интерпретировать как решение краевой задачи, в которой в качестве краевых условий выступают измерения $O_i + \varepsilon_i$, а искомыми величинами — значения функций $y_1(t)$, $y_2(t), \dots, y_6(t)$, описывающие траекторию небесного тела.

В случае если движение тела рассматривается на неактивной фазе полета и влиянием неизвестных параметров вектора $\boldsymbol{a}$ можно пренебречь, задача определения орбиты небесного тела сводится к краевой задаче с системой дифференциальных уравнений вида

$$\ddot{y} = \boldsymbol{F}(t, \mathbf{y}) \tag{1.3}$$

и краевыми условиями, задаваемыми системой уравнений

$$C\big(t_i, \mathbf{y}(t_i)\big) = O_i + \varepsilon_i, \quad i = \overline{1,n}. \tag{1.4}$$

Отличие данной задачи от классической краевой задачи — наличие погрешностей в краевых условиях. Поэтому для ее решения требуется, как правило, избыточное количество наблюдений (краевых условий). Кроме этого, ошибки наблюдений могут быть коррелированы, тогда еще необходимо знать корреляционную матрицу $K_{\text{наб}}$ размерностью $(n \times n)$.

Для простоты, но не умаляя общности, будем считать, что ошибки ε_i являются равноточными, некоррелированными нормальными случайными величинами с нулевым математическим ожиданием и дисперсией σ_0^2: $\varepsilon_i \in N(0, \sigma_0^2)$, тогда корреляционная матрица для наблюдений $K_{\text{наб}}$ имеет вид:

$$K_{\text{наб}} = \sigma_0^2 \cdot E, \tag{1.5}$$

где E — единичная матрица размерности ($n \times n$).

Решение поставленной задачи обычно происходит в два этапа:

1) нахождение предварительной орбиты, т. е. начальных значений $\tilde{y}_1(t_0), \tilde{y}_2(t_0), \dots, \tilde{y}_6(t_0)$;

2) улучшение параметров предварительной орбиты.

Определение предварительной орбиты

Алгоритм определения предварительной орбиты задается видом наблюдений. В данной статье мы ограничимся случаем, когда нам известно направление на небесное тело на моменты времени $t_1, t_2, \dots, t_n$ (позиционные наблюдения). Задача определения орбиты небесного тела по позиционным наблюдениям имеет длительную историю. Впервые данная задача была сформулирована и решена еще Пьером-Симоном Лапласом в далеком 1780 г. Она была решена Лапласом в предположении, что для вновь отрытого небесного тела в заданную эпоху известно его положение на небесной сфере, а также известны первые и вторые производные его координат. Однако долгое время низкая точность и небольшое количество позиционных наблюдений, да еще произведенных, как правило, с большими интервалами между ними, не позволяли на момент открытия метода успешно применять его на практике. Тем более что спустя четверть века, в 1809 г., Карлом Фридрихом Гауссом был разработан метод определения орбиты по трем позиционным наблюдениям, и он на долгое время стал основным практическим методом определения орбит новых небесных тел. В настоящее время имеется огромный арсенал методов определения предварительной орбиты — это модификации методов Гаусса [5] и Лапласа [6].

В статье мы рассматриваем определение орбиты спутника Земли, однако приведенные формулы пригодны и для определения орбиты небесного тела, двигающегося вокруг Солнца. Для определенности будем считать, что углами, определяющими направление на тело, являются: α_i — прямое восхождение — угол вдоль экватора Земли, отсчитываемый от линии пересечения плоскостей экватора Земли и ее орбиты на заданную эпоху T_0; δ_i — склонение — угол, отсчитываемый от плоскости экватора Земли. При вычислении предварительной орбиты, как правило, пренебрегают ошибками наблюдений и предполагают, что движение тела является невозмущенным, т. е. происходит по Кеплеровой орбите. В данной задаче может быть выделено две подзадачи: вычисление топоцентрических расстояний до объекта (расстояния от наблюдателя) и вычисление предварительных значений вектора состояний (элементов орбиты объекта). Вычисление топоцентрических расстояний является нетривиальной задачей, которая приводится к системе нелинейных уравнений, например к уравнениям Лагранжа – Гаусса [1].

В качестве последних исследований можно указать работу [7], в которой предлагается искать топоцентрические расстояния путем перебора орбитальных плоскостей и последующим определением расстояний от наблюдателя до точек пересечения выбранной плоскости с векторами направления на объект. Далее по двум гелиоцентрическим положениям и промежутку времени между ними определяются остальные элементы орбиты. По полученным системам элементов находятся значения среднеквадратических уклонений наблюденных положений от вычисленных положений по всем имеющимся наблюдениям. Системы элементов, дающие наименьшие среднеквадратические уклонения, считаются наиболее вероятными для вновь открытого малого тела. Преимуществом данного метода является его заточенность под дальнейшие методики улучшения. Однако в данной статье мы решили остановиться на методике, специально разработанной [8] для определения первоначальных орбит ИСЗ. Эту методику можно использовать, когда наблюдения разделены промежутками времени, малыми по сравнению с периодом обращения небесного тела.

Введем обозначения: $\boldsymbol{r}_i$ — геоцентрический радиус-вектор спутника, $\boldsymbol{R_i}$ — геоцентрический радиус-вектор места наблюдения и $\boldsymbol{\rho_i}$ — топоцентрический радиус-вектор спутника в момент t_i $(i = \overline{0,\ n})$. Используя эти обозначения, можно записать векторное равенство:

$$\boldsymbol{r_i} = \boldsymbol{\rho_i} + \boldsymbol{R_i} \quad (i = \overline{1,\ \ n}). \tag{2.1}$$

Пусть моменты времени между наблюдениями невелики. Разложим $\boldsymbol{r_i}$ в ряд Тейлора в окрестности $t = t_0$ и получим:

$$\boldsymbol{r_i} = F_i\,\boldsymbol{r_0} + G_i\,\dot{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{0}} \quad (i = \overline{1,\ n-1}), \tag{2.2}$$

где скалярные коэффициенты F_i, G_i определяются выражениями:

$$F_i = 1 - \frac{1}{2}\,u_0\,\tau_i^2 - \frac{1}{6}\,u'_0\,\tau_i^3 + \\ + \frac{1}{24}\,(u_0^2 - u''_0)\,\tau_i^4 + \cdots, \tag{2.3}$$

$$G_i = 1 - \frac{1}{6}\,u_0\,\tau_i^3 - \frac{1}{12}\,u'_0\,\tau_i^4 + \\ + \frac{1}{120}\,(u_0^2 - 3\,u''_0)\,\tau_i^5 + \cdots, \tag{2.4}$$

$$u_0 = r_0^{-3}, \tau_i = \sqrt{f\,m}\,(t_i - t_0), \\ u'_0 = -3\,r_0^{-4} r'_0 \quad u''_0 = 12\,r^{-5} r' - 3\,r^{-4} r''. \tag{2.5}$$

Исключив из (2.2) $\dot{\boldsymbol{r}}_0$, имеем:

$$n_i\,\boldsymbol{r_1} - \boldsymbol{r_0} + n'_i\,\boldsymbol{r_i} = 0 \quad (i = \overline{2,\ n-1}), \tag{2.6}$$

где

$$n_i = \frac{-G_i}{F_i\,G_1 - F_1\,G_i}, \quad n'_i = \frac{G_1}{F_i\,G_1 - F_1\,G_i}. \tag{2.7}$$

Коэффициенты (2.7) могут быть представлены рядами по степеням времени:

$$
\begin{aligned}
n_i &= \frac{\tau_i}{\tau'_i}\left[1+\frac{u_0}{6}\left({\tau'_i}^2-\tau_i^2\right)+\cdots\right],\\
n'_i &= -\frac{\tau_1}{\tau'_i}\left[1+\frac{u_0}{6}\left({\tau'_i}^2-\tau_1^2\right)+\cdots\right],\\
\tau'_i &= \tau_i-\tau_1.
\end{aligned}
\qquad (2.8)
$$

Если ввести обозначения

$$
\begin{aligned}
n_i^0 &= \frac{\tau_i}{\tau'_i},\quad \chi_i = 1+\frac{u_0}{6}\left({\tau'_i}^2-\tau_i^2\right)+\cdots,\\
\chi'_i &= 1+\frac{u_0}{6}\left({\tau'_i}^2-\tau_1^2\right)+\cdots,
\end{aligned}
\qquad (2.9)
$$

то (2.8) можно записать в виде: $n_i = n_i^0\,\chi_i$, $n'_i = (1-n_i^0)\,\chi'_i$. Подставив (2.1) в (2.6), получим векторные уравнения:

$$
n_i\,\boldsymbol{\rho}_1-\boldsymbol{\rho}_0+n'_i\,\boldsymbol{\rho}_i = -\left(n_i\,\boldsymbol{R}_1-\boldsymbol{R}_0+n'_i\,\boldsymbol{R}_i\right)\quad \left(i=\overline{2,\,n-1}\right). \qquad (2.10)
$$

Уравнения (2.10) являются системой нелинейных уравнений относительно неизвестных значений модулей топоцентрических радиус-векторов $\boldsymbol{\rho}_i$. В случае когда τ_i малы, система может решаться методом итераций. В первом приближении χ_i и χ'_i можно взять равными единице.

Преобразуем (2.10) к виду, удобному для итераций. Введем следующие переменные для направляющих косинусов топоцентрического направления на небесное тело:

$$
\begin{cases}
\lambda_k = \cos\alpha_k\cos\delta_k\\
\eta_k = \sin\alpha_k\cos\delta_k\\
\nu_k = \sin\delta_k
\end{cases}
\quad \left(k=\overline{0,\,n-1}\right),
$$

а также введем несколько вспомогательных величин:

$$
\begin{aligned}
\xi_i &= \chi'_i X_i-\chi_i X_1, & \xi'_i &= \chi'_i X_i-X_0,\\
\eta_i &= \chi'_i Y_i-\chi_i Y_1, & \eta'_i &= \chi'_i Y_i-Y_0,\\
\zeta_i &= \chi'_i Z_i-\chi_i Z_1, & \zeta'_i &= \chi'_i Z_i-Z_0,
\end{aligned}
$$

$$
\Delta_i = \begin{vmatrix}\lambda_1 & \lambda_0 & \lambda_i\\ \mu_1 & \mu_0 & \mu_i\\ \nu_1 & \nu_0 & \nu_i\end{vmatrix},
$$

$$
a_i = \begin{vmatrix}\xi_1 & \lambda_0 & \lambda_i\\ \eta_1 & \mu_0 & \mu_i\\ \zeta_1 & \nu_0 & \nu_i\end{vmatrix},\quad
a'_i = \begin{vmatrix}\xi'_1 & \lambda_0 & \lambda_i\\ \eta'_1 & \mu_0 & \mu_i\\ \zeta'_1 & \nu_0 & \nu_i\end{vmatrix},
$$

$$
b_i = \begin{vmatrix}\lambda_1 & \xi_i & \lambda_i\\ \mu_1 & \eta_i & \mu_i\\ \nu_1 & \zeta_i & \nu_i\end{vmatrix},\quad
b'_i = \begin{vmatrix}\lambda_1 & \xi'_i & \lambda_i\\ \mu_1 & \eta'_i & \mu_i\\ \nu_1 & \zeta'_i & \nu_i\end{vmatrix},
$$

$$
c_i = \begin{vmatrix}\lambda_1 & \lambda_0 & \xi_i\\ \mu_1 & \mu_0 & \eta_i\\ \nu_1 & \nu_0 & \zeta_i\end{vmatrix},\quad
c'_i = \begin{vmatrix}\lambda_1 & \lambda_0 & \xi_i\\ \mu_1 & \mu_0 & \eta'_i\\ \nu_1 & \nu_0 & \zeta'_i\end{vmatrix}.
$$

Тогда система для нахождения топоцентрических расстояний имеет вид:

$$
\begin{cases}
\rho_0 = \dfrac{-b_i\,n_i^0-b'_i}{\Delta_i}\\[2mm]
\rho_1 = \dfrac{a_i\,n_i^0-a'_i}{n_i^0\,\chi_i\,\Delta_i}\\[2mm]
\rho_i = \dfrac{c_i\,n_i^0-c'_i}{(1-n_i^0)\,\chi'_i\,\Delta_i}
\end{cases}
\quad \left(i=\overline{2,\,n-1}\right). \qquad (2.10)
$$

Нетрудно видеть, что минимальное число наблюдений, необходимых для нахождения геоцентрических положений спутника, равно 3, т. е. $n = 3$. После того как из (2.10) будут найдены топоцентрические расстояния, по формулам (2.8) находим уточненные значения χ_i и χ'_i с учетом (2.1). Если в выражении (2.8) ограничиться двумя слагаемыми для χ_i и χ'_i, то необходимо выполнить 2 итерации.

Для вычисления предварительных компонент скорости предлагается использовать классический метод Гаусса [1] или его модификации [9], т. е. использовать два значения топоцентрических расстояний, которые позволяют вычислить значения радиус-векторов небесного тела. Однако, если ряд наблюдений плотный, то можно вычислить необходимые компоненты скорости по формулам численного дифференцирования. Например, три позиционных наблюдения позволяют вычислить три геоцентрических положения спутника и по ним составить интерполяционный многочлен второй степени в форме Лагранжа. Продифференцировав, имеем:

$$
\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{r}}_0 = {}&\frac{2t_1-(t_2+t_3)}{(t_1-t_1)(t_1-t_3)}\boldsymbol{r}_1+\frac{2t_1-(t_1+t_3)}{(t_2-t_1)(t_2-t_3)}\boldsymbol{r}_2+\\
&+\frac{2t_1-(t_1+t_2)}{(t_3-t_1)(t_3-t_2)}\boldsymbol{r}_3.
\end{aligned}
\qquad (2.11)
$$

В случае если наблюдений много, то надежнее вычислить осредняющий многочлен [10] и брать производную от него.

Для демонстрации эффективности метода мы вычислили орбиту спутника по описанному выше алгоритму Ю. В. Батракова, вычислив скорости по формуле (2.11).

Пример. Спутник имеет слабоэллиптическую орбиту с эксцентриситетом $e = 0.108$ и большой полуосью $a = 7337.4$ км. Предполагается, что произведено три измерения направления на спутник (модельные позиционные наблюдения) из трех пунктов, имеющих геоцентрические координаты (км) на моменты наблюдений в экваториальной системе координат:

$$X_1 = 750.0 \quad Y_1 = -5700.0 \quad Z_1 = -2745.9$$

$$X_2 = 750.0 \quad Y_2 = -5710.0 \quad Z_2 = -2725.0$$

$$X_3 = 750.0 \quad Y_3 = -5720.0 \quad Z_3 = -2704.0.$$

Интервал между первым и вторым наблюдением — 5 с, между вторым и третьим — 10 с, т. е. ряд наблюдений плотный. Были получены следующие направляющие косинусы направлений на спутник с этих трех наблюдательных станций (считалось, что точность модельных наблюдений такова, что обеспечивает 4 верных знака в направляющих косинусах ИСЗ):

$$0.0957\ \ 0.1134\ -0.9889$$

$$0.1558\ \ 0.1337\ -0.9786$$

$$0.2690\ \ 0.1596\ -0.9497.$$

В результате двух итераций были получены следующие компоненты положения (км), а также по формулам численного дифференцирования компоненты скорости (км/с) на момент первого наблюдения:

$$\tilde{x}_0 = 807.2 \quad \tilde{y}_0 = -5632.2 \quad \tilde{z}_0 = -3336.9$$
$$\dot{\tilde{x}}_0 = 7.927 \quad \dot{\tilde{y}}_0 = 1.038 \quad \dot{\tilde{z}}_0 = 0.745.$$

Для сравнения приводится возмущенное положение и скорость спутника на момент 1-го наблюдения:

$$x_0 = 808.1 \quad y_0 = -5631.0 \quad z_0 = -3346.7$$
$$\dot{x}_0 = 8.044 \quad \dot{y}_0 = 1.080 \quad \dot{z}_0 = 0.766.$$

Как показывает сравнение полученных в результате итераций компонент векторов положения $\{\tilde{x}_0, \tilde{y}_0, \tilde{z}_0\}$ и скорости $\{\dot{\tilde{x}}_0, \dot{\tilde{y}}_0, \dot{\tilde{z}}_0\}$ с точными компонентами $\{x_0, y_0, z_0\}$ и $\{\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0\}$, получены достаточные для уточнения значения вектора состояния спутника на момент первого наблюдения. СКО положения составила 7.0 км и ошибка скорости — 0.14 м/с.

Улучшение предварительной орбиты

Следующий этап определения орбиты спутника по наблюдениям — улучшение полученных начальных компонент положения и скорости, а также других параметров, если в этом есть необходимость. В дальнейшем изложении мы ограничимся случаем улучшения 6 параметров (компонент положения и скорости на начальный момент времени). Как уже отмечалось, имея n наблюдений, мы можем составить n разностей вида:

$$O_i - C(t_i, \mathbf{y}(t_i, \boldsymbol{y}_0)) + \varepsilon_i, \quad i = \overline{1, n}, \tag{3.1}$$

где O_i — i-наблюдение на момент времени t_i, C — вычисленное положение небесного тела, ε_i — ошибка i-наблюдения. Здесь надо подчеркнуть, вычисленное положение небесного тела C есть функция вектора состояния $\boldsymbol{y}(t_i)$, который, в свою очередь, зависит от начального вектора $\boldsymbol{y}_0$ — значения вектора состояния в начальный момент.

Применим к этим разностям условие метода наименьших квадратов (МНК) для этого составим следующую целевую функцию:

$$F(\boldsymbol{y}_0) = \sum_1^n \left(O_i - C(t_i, \mathbf{y}(t_i, \boldsymbol{y}_0)) + \varepsilon_i \right)^2, \tag{3.2}$$

тогда набор начальных условий $\boldsymbol{y}_0$, обеспечивающий минимум этой функции, будет искомым. Запишем необходимое условие минимума функции цели в виде системы из 6 уравнений:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial F}{\partial x_0} = 0, \ \ \frac{\partial F}{\partial y_0} = 0, \ \ \frac{\partial F}{\partial z_0} = 0, \\ &\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_0} = 0, \ \ \frac{\partial F}{\partial \dot{y}_0} = 0, \ \ \frac{\partial F}{\partial \dot{z}_0} = 0. \end{aligned} \tag{3.3}$$

В случае если улучшаются еще и другие параметры, то в системе (3.3) появятся дополнительные уравнения — частные производные функции цели от этих параметров. Запишем систему (3.3) в матричном виде:

$$A^T L = 0, \tag{3.4}$$

где A — матрица размером $n \times 6$, элементы которой суть частные производные от вычисленных положений небесного тела по улучшаемым параметрам: $a_{i,j} = \left\{ \frac{\partial C(t_i, y(t_i, \tilde{\boldsymbol{y}}_0))}{\partial y_{0,j}} \right\}$, а $L = \{O_i - C(t_i, \boldsymbol{y}(t_i, \boldsymbol{y}_0))\}$ — вектор-столбец — разность между наблюденным и вычисленным положением небесного тела, часто обозначаемая как $O - C$. Система уравнений (3.4) нелинейная, поэтому решается приближенными методами, например методом Ньютона. Идея этого метода заключается в линеаризации уравнений в окрестности некоторого начального значения. Неизвестными в этих уравнениях являются поправки к начальным значениям. Поскольку одной итерации, как правило, недостаточно, то после получения поправок составляются новые уравнения и снова ищутся поправки к уже уточненным значениям. При выполнении итераций используются два подхода. В первом подходе по уточненным значениям вычисляются коэффициенты и правые части уравнений. Такая методика, собственно, и называется методом Ньютона решения систем нелинейных уравнений. Во втором подходе перевычисляются только правые части уравнений, и такой метод в математической литературе называется модифицированным методом Ньютона. При втором подходе требуется больше итераций, однако, как показывает опыт, область сходимости в этом случае больше, т. е. значения начальных параметров могут быть более «грубыми».

Рассмотрим схему получения линеаризованных уравнений. Возьмем компоненты вектора состояния, полученные для предварительной орбиты $\tilde{y}_0$, и разложим функцию $C(t_i, \boldsymbol{y}(t_i, \boldsymbol{y}_0))$ в ряд Тейлора в окрестности приближенного вектора $\tilde{y}_0$, представив $\boldsymbol{y}_0$ в виде $\boldsymbol{y}_0 = \tilde{\boldsymbol{y}}_0 + \Delta \boldsymbol{y}_0$, имеем $C(t_i, \boldsymbol{y}(t_i, \tilde{\boldsymbol{y}}_0)) + \frac{\partial C(t_i, y(t, \tilde{y}_0))}{\partial \boldsymbol{y}_0} \Delta \boldsymbol{y}_0$. Подставив эти разности в (3.4), получим n линейных уравнений. В матричном виде эти уравнения будут иметь следующий вид:

$$A^T (B - A\, \Delta \boldsymbol{y}) = 0, \tag{3.5}$$

где вектор-столбец $B = \{O_i - C(t_i, \boldsymbol{y}(t_i, \tilde{\boldsymbol{y}}_0)\}$ — разность наблюденного и вычисленного (с приближенными начальными условиями $\tilde{\boldsymbol{y}}_0$) положения. Окончательно имеем:

$$A^T A\, \Delta\boldsymbol{y} = A^T B. \tag{3.6}$$

Решение дается выражением

$$\Delta\boldsymbol{y} = (A^T A)^{-1} A^T B. \tag{3.7}$$

Описанный алгоритм улучшения отличается от вывода классического дифференциального метода, так называемого метода вариации элементов [1]. Поэтому для полноты изложения приводим вывод и классического дифференциального метода. В дифференциальном методе, перед тем как применить МНК, выражение (3.1) линеаризуется:

$$O_i - C\big(t_i, \boldsymbol{y}(t_i, \tilde{\boldsymbol{y}}_0)\big) - \frac{\partial C(t_i, \mathbf{y}(t_i, \tilde{\mathbf{y}}_0))}{\partial y_0} \Delta\boldsymbol{y}_0 + \varepsilon_i \qquad i = \overline{1, n} \tag{3.8}$$

Приравняв выражение (3.8) к нулю и сделав элементарные преобразования, мы получаем систему уравнений, называемую системой условных уравнений:

$$\frac{\partial C(t_i, \mathbf{y}(t_i, \tilde{\mathbf{y}}_0))}{\partial y_0} \Delta\boldsymbol{y}_0 = O_i - C\big(t_i, \mathbf{y}(t_i, \tilde{\boldsymbol{y}}_0)\big) + \varepsilon_i \qquad i = \overline{1, n} \tag{3.9}$$

или в матричном виде

$$A\, \Delta\boldsymbol{y} = B + E. \tag{3.10}$$

Здесь, как и в (3.6), A — матрица коэффициентов условных уравнений, суть матрица частных производных наблюдений от начальных значений улучшаемых параметров, $\Delta\boldsymbol{y}$ — вектор-столбец поправок улучшаемых параметров, $B = (O_1 - C_1, O_2 - C_2, \dots, O_n - C_n)^T$ — вектор-столбец разности наблюденных и вычисленных положений, $E = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)^T$ — вектор-столбец ошибок (невязок) измеренных величин. Условие МНК применяется к уже линеаризованной системе (3.10). В этом случае функция цели имеет вид:

$$F(\boldsymbol{y}_0) = (A\, \Delta\boldsymbol{y} - B)^T (A\, \Delta\boldsymbol{y} - B). \tag{3.11}$$

Дифференцируя (3.11) по $\Delta\boldsymbol{y}$, получаем

$$A^T (A\, \Delta\boldsymbol{y} - B) = \bar{0} \quad \rightarrow \quad A^T A\, \Delta\boldsymbol{y} = A^T B, \tag{3.12}$$

и тогда решение получается из выражения:

$$\Delta\boldsymbol{y} = (A^T A)^{-1} A^T B. \tag{3.13}$$

Выражение (3.13) совпадает с (3.7), что позволяет говорить о тождественности получаемых результатов. Однако первый вывод кажется нам более информативным, поскольку подчеркивает, что мы решаем систему нелинейных уравнений, минимизируя разность (3.1), т. е. решаем систему без каких-либо упрощающих предположений о линейности. Единственной проблемой является удовлетворительная точность начального приближения, поскольку задачу решают итерациями и начальное приближение должно находиться в области сходимости метода Ньютона. Итерации осуществляются следующим образом: полученную поправку $\Delta\boldsymbol{y}$ прибавляют к вектору $\tilde{\boldsymbol{y}}_0$, и с этими новыми начальными данными получают новую систему условных уравнений, и так до тех пор, пока норма поправок не станет меньше заданной величины. Если итерации сходятся, то полученные начальные значения $\boldsymbol{y}_0$ обеспечивают минимум квадрату случайных ошибок $\sum_{i=1}^{n}\big(O_i - C_i(y_0)\big)^2$.

Полученные начальные значения y_0 являются случайными величинами, причем полученные в результате итераций величины являются оценками математических ожиданий этих случайных величин. Если ошибки наблюдений невелики, то мы можем считать, что ошибки наблюдений линейным образом связаны с ошибками начальных условий. В этом случае полученный вектор начальных данных будет нормальным случайным вектором с математическим ожиданием $\boldsymbol{y}_0$ и корреляционной матрицей K, определяющей дисперсии и корреляционные моменты компонент вектора $\boldsymbol{y}_0$:

$$K = (A^T \cdot A)^{-1} \sigma_0^2, \quad \text{где} \quad \sigma_0^2 = \frac{1}{(n-6)} \sum_{i=1}^{n} (O_i - C_i)^2,$$

где σ_0^2 — среднеквадратическая ошибка наблюдений.

Процедура улучшения осложняется, если определитель матрицы $A^T A$ близок к нулю. Это так называемый случай плохой обусловленности матрицы нормальных уравнений (малой информативности наблюдений). В этом случае ошибки, которые присутствуют в условных уравнениях, будут приводить к нереальным поправкам. И тогда прибегают к различным методам регуляризации решения, например используя метод [11]. Суть большинства их заключается как бы в «замораживании» части значений улучшаемых параметров, наиболее радикальное решение в этом направлении — исключение части параметров из системы (3.12).

Следует отметить, что оптимальный выбор начальной эпохи позволяет увеличить значение определителя матицы $A^T A$. Этот прием был применен одним из авторов статьи при улучшении орбиты кометы Брукса 2 [12]. Дата эпохи выбиралась как среднее арифметическое моментов наблюдений. В дальнейшем этот прием неоднократно применялся авторами при улучшении небесных тел. Дальнейший опыт показал, что такой выбор даты дает наибольший эффект при улучшении орбит с большим эксцентриситетом.

Вторым моментом, представляющим трудность, является процедура вычисления матрицы изохронных производных, элементами которой являются частные производные от текущих параметров движения по их начальным значениям (элементы матриканта). Таким образом, элементы матриканта удовлетворяют равенствам $a_{i\,j} = \frac{\partial\, y_i(t)}{\partial\, y_j(t_0)}$. Значения этих производных можно вычислить двумя способами.

В первом способе используются конечно-разностные формулы численного дифференцирования. В этом случае, если использовать трехузловую формулу численного представления производных, требуется $12 = 2 \cdot 6$ интегрирований уравнений движения, а если еще улучшаются другие параметры, например компоненты вектора $\boldsymbol{a}$, то число интегрирований увеличивается, что требует больших затрат машинного времени. К недостаткам этого метода следует также отнести отсутствие четких критериев для выбора величин приращений начальных условий для различных начальных параметров. Дело в том что для вычисления более близких по времени к начальной эпохе (t_0) производных требуются большие вариации, а для вычисления удаленных по времени наблюдений требуются меньшие вариации начальных данных.

Во втором способе используются дифференциальные уравнения в вариациях для вычисления матриканта [13]:

$$\frac{d}{d\,t}\,\Phi\,(t, t_0) \;=\; F(t)\,\Phi\,(t, t_0), \tag{3.14}$$

где $\Phi\,(t, t_0)$ — матрикант. Начальным условием для матричного дифференциального уравнения является единичная матрица E. Если в (3.14) ограничиться случаем, когда улучшаются только 6 величин: 3 компоненты положения и 3 компоненты скорости, то матрица $F(t)$ имеет вид:

$$F(t) \;=\; \begin{pmatrix} O & I \\ G_1(t) & G_2(t) \end{pmatrix}.$$

Здесь O — нулевая матрица 3×3, а $G_1(t)$ — матрица частных производных от компонент вектора ускорения, действующего на небесное тело, по текущим координатам, $G_2(t)$ — матрица частных производных от компонент вектора ускорения по текущим скоростям. Часть производных, фигурирующих в матрице $\Phi\,(t,\, t_0)$, растет со временем как степенная функция. Поэтому при численном интегрировании матричного дифференциального уравнения (3.14) на значительные интервалы времени наблюдается сильный рост правых частей в дифференциальных уравнениях (3.14), а это, в свою очередь, приводит к необходимости дробления шага интегрирования, а значит, к увеличению времени вычислений.

Исправить ситуацию можно следующим образом. Матрикант, вычисленный на интервале $[t_0,\, t]$, представим в виде произведения матрикантов на подынтервалах времени [13]:

$$\begin{aligned} \Phi\,(t, t_0) \;&=\; \Phi\,(t, t_{m-1})\,\Phi\,(t_{m-1}, t_{m-2})\;\ldots \\ &\ldots\;\Phi\,(t_2,\, t_1)\,\Phi\,(t_1,\, t_0), \end{aligned} \tag{3.15}$$

где $t_0,\, t_1,\, \ldots, t_{m-1},\, t_m = t$ — возрастающая или убывающая последовательность моментов времени. При вычислении матриканта Φ на любом интервале $[t_k, t_{k-1}]$, $(k = \overline{1, m})$ начальным условием, как и для системы (3.14), является единичная матрица. Если для интегрирования (3.14) используется одношаговый метод интегрирования, то длину интервала $[t_k, t_{k-1}]$ оптимально сократить до минимально возможного — до длины шага интегрирования уравнений движения (дифференциальные уравнения (3.14) интегрируются одновременно с уравнениями движения).

Как показали численные эксперименты, использование такого приема позволяет значительно сократить время вычисления при улучшении орбиты. Так, для орбиты спутника, приведенного в примере вычисления предварительной орбиты, численное интегрирование матриканта на 30 оборотов спутника вокруг Земли с учетом свойства (3.15) и без него дает сокращение затрат машинного времени в 12.7 раз.

Заключение

Представлены алгоритмы определения орбиты небесного тела, а также приведен ряд рекомендаций при определении орбит. Так, при вычислении предварительной орбиты в случае плотного ряда позиционных наблюдений топоцентрические расстояния до небесного тела предложено вычислять по формулам Ю. В. Батракова. По этим формулам можно вычислить n значений радиус-векторов положений тела, где n — число наблюдений. При вычислении компонент скорости наряду с классическим методом Гаусса определения элементов по двум гелиоцентрическим радиус-векторам предлагается использовать формулы численного дифференцирования. По n значениям радиус-векторов вычисляются осредняющие многочлены второй или третьей степени, производные от которых дают искомые компоненты скорости. В качестве эпохи при улучшении параметров предварительной орбиты рекомендуется выбирать дату, являющуюся средним арифметическим моментов наблюдений. Такой выбор эпохи повышает обусловленность матрицы нормальных уравнений, что дает более надежные значения улучшаемых параметров. При вычислении матриканта, необходимого для вычисления коэффициентов условных уравнений, предложено использовать свойство матриканта, которое заключается в том, что произведение матрикантов, вычисленных на подынтервалах, равно значению матриканта на интервале. Использование этого свойства позволяет значительно сократить время вычисления коэффициентов условных уравнений и, в целом, существенным образом ускорить процесс уточнения орбиты.

Литература

1. *Субботин М. Ф.* Введение в теоретическую астрономию. М.: Наука, 1968.

2. *Дубяго А. Д.* Определение орбит. М. — Л.: Гостехиздат, 1949.

3. *Эскобал П.* Методы определения орбит. М.: Мир, 1970.

4. *Herrick S.* Astrodynamics. London — New York — Cincinnati — Toronto — Melbourne: Van Nostrand Reinhold Co, 1971.

5. *Marsden B. G.* The computation of orbits in indeterminate and uncertain cases // Astronomical Journal. 1991. Vol. 102. P. 1539–1552.

6. *Быков О. П., Холшевников К. В.* Прямые методы определения орбит небесных тел // Учебное пособие. Изд. СПбГУ, 2013.

7. *Бондаренко Ю. С., Вавилов Д. Е., Медведев Ю. Д.* Метод определения орбит малых тел солнечной системы, основанный на переборе орбитальных плоскостей // Астрономический вестник. 2014. Т. 48, № 3. С. 229–233.

8. *Батраков Ю. В.* Определение первоначальных орбит искусственных спутников из наблюдений, моменты которых известны приближенно // Бюллетень Института теоретической астрономии. 1960. Т. 7, № 7. С. 570–580.

9. *Шефер В. А.* Новый метод определения орбиты по двум векторам положения, основанный на решении уравнений Гаусса // Астрономический вестник. 2010. Т. 44, № 3. С. 273–288.

10. *Карпичева Н. А., Медведев Ю. Д.* Сборник лабораторных работ по вычислительной математике // Учебное пособие. СПб.: ВКА им. А. Ф. Можайского, 2005.

11. *Тихонов А. Н.* О некорректных задачах линейной алгебры и устойчивом методе их решения // ДАН СССР. 1965. Т. 163, № 3. С. 591–594.

12. *Медведев Ю. Д.* Орбита кометы Брукса 2 на интервале 1889–1933 гг. // Кинематика и физика небесных тел. 1986. Т. 2, №2. С. 83–87.

13. *Battin R. H.* An introduction to the mathematics and methods of astrodynamics // American Institute of Aeronautics & Astronautics, 1999.