

## Метод определения прямолинейной орбиты для тела, движущегося в плоскости эклиптики

© В. Б. Кузнецов

ИПА РАН, г. Санкт-Петербург, Россия

### Реферат

Работа посвящена определению прямолинейной орбиты по трём наблюдениям для тел, движущихся в плоскости эклиптики. Этот частный случай, когда наблюдаемое тело и наблюдатель движутся в одной плоскости, является наиболее трудным для исследований прямолинейного движения. В исследовании рассматриваются траектории 2-го рода, т. е. проходящие через афелий орбиты. Они соответствуют прямолинейно-эллиптическому движению. Такие траектории можно разделить на два возможных случая группировки наблюдений относительно момента прохождения афелия. Также рассматриваются траектории 1-го рода, т. е. не проходящие через афелий орбиты. Они могут соответствовать всем типам прямолинейного движения (эллиптическому, параболическому и гиперболическому). Целью данной работы явилась разработка метода, позволяющего определять орбиту при любом распределении наблюдений на траекториях обоих родов.

Предлагаются системы трансцендентных уравнений, удовлетворяющих как эллиптическому типу движения (по траектории второго рода) наблюдаемого тела, так и всем типам (по траектории первого рода). На базе имеющейся системы уравнений строится целевая функция, минимум которой представляет собой искомое решение. Описывается методика для поиска границ двумерной области возможных решений. Минимум целевой функции находится с помощью метода Дэвидона – Флетчера – Пауэлла. Из двух возможных решений выбирается взаимосогласованное, с наилучшим представлением наблюдений.

Представленные в данной работе методы иллюстрируются определением модельных прямолинейных орбит эллиптического и гиперболического типов.

**Ключевые слова:** задача двух тел, прямолинейное движение, определение предварительной орбиты, метод Дэвидона – Флетчера – Пауэлла.

*Контакты для связи:* Кузнецов Владимир Борисович ([vb.kuznetsov@iaaras.ru](mailto:vb.kuznetsov@iaaras.ru)).

*Статья поступила в редакцию 30.06.2020, принята к публикации 17.09.2020, опубликована 30.10.2020.*

**Для цитирования:** Кузнецов В. Б. Метод определения прямолинейной орбиты для тела, движущегося в плоскости эклиптики // Труды ИПА РАН. 2020. Вып. 54. С. 52–62.

<https://doi.org/10.32876/AplAstron.54.52-62>

## Method of Determination of Rectilinear Orbit for an Object Moving in the Ecliptic Plane

V. B. Kuznetsov

Institute of Applied Astronomy of the Russian Academy of Sciences, Saint Petersburg, Russia

### Abstract

The paper describes the method of determining a preliminary radial elliptic orbit lying in the ecliptic plane. Three observations are needed for the orbit determination in this case. It is a particular case that the observed body and the observer are moving in the same plane, which is more difficult to analyze for rectilinear movement. The study considers the 2 type of trajectories that cross the aphelion of the orbit. Usually, these trajectories can be divided into two observational subtypes according to the moment of their aphelion passage. The 1 type that does not cross the orbit aphelion is also studied. As a rule, these trajectories are grouped according to the types of movement described by elliptic and hyperbolic systems of equations.

The aim of the present work is to develop a method that allows us to determine the orbit for cases with any distribution of the observations for any value of the energy of the body observed.

The systems of transcendent equations are derived as meeting both elliptic movement of the observed body (a trajectory of the 2<sup>nd</sup> type) and all the other types of movement (a trajectory of the 1<sup>st</sup> type). The goal function is produced on the basis of such system of equations. The minimum of the goal function is the solution sought. The technique to determine the borders of two-dimensional area of possible solutions is described. The minimum of the goal function is found using the Davidon – Fletcher – Powell method. The real solution is chosen from the two possible ones.

The method is illustrated by using models of finding rectilinear orbits of both elliptic and hyperbolic types.

**Keywords:** two-body problem, rectilinear movement, determination of preliminary orbit, method of Davidon – Fletcher – Powell.

Contacts: Vladimir B. Kuznetsov (vb.kuznetsov@iaaras.ru).

Received 30 June, 2020, accepted 17 September, 2020, published 30 October, 2020.

**For citation:** Kuznetsov V. B. Method of determination of radial orbit for an object moving in the ecliptic plane. Transactions of IAA RAS. 2020. Iss. 54. P. 52–62.  
<https://doi.org/10.32876/AplAstron.54.52-62>

## Введение

Определение прямолинейной орбиты в некомпланарном случае представляет собой довольно простую задачу [1]. Двух наблюдений достаточно для определения положения прямой линии в пространстве из геометрических соотношений. Далее, из динамического трансцендентного соотношения можно определить большую полуось орбиты и положение объекта в заданную эпоху.

Для компланарного случая, когда искомая орбита лежит в плоскости движения наблюдателя (эклиптики), проблема определения заметно усложняется [2, 3]. Из геометрических построений невозможно определить положение прямой линии. Необходимо иметь три наблюдения для того, чтобы построить динамическую систему из двух нелинейных уравнений относительно двух неизвестных, одним из которых является большая полуось или ее аналог.

Частный случай для определения прямолинейно-параболической орбиты, сводящийся к одному алгебраическому уравнению, был рассмотрен в [2, 3].

Прямолинейно-эллиптической траекторией второго рода называется часть прямой, по которой сначала происходит движение от центра притяжения до апоцентра, а затем от апоцентра — в сторону перицентра. Такая траектория содержит второй («пустой») фокус орбиты и по аналогии с соответствующим эллиптическим сектором обозначается вторым родом [4]. Это единственный вид траектории в прямолинейном движении, когда возможно движение в противоположных направлениях. Вывод уравнений для определения такой орбиты было произведено ранее [3].

Определение каждой из орбит, прямолинейно-гиперболической и прямолинейно-эллиптической с траекторией 1-го рода (не проходящей через афелий), было выполнено по отдельности, также была сделана попытка объединить эти два типа движения через классическое уравнение Ламберта для прямолинейного движения и предложен итерационный процесс для нахождения решения [3]. Особенностью универсальной системы уравнений является возможность существования двух решений. В работе [5] была предложена универсальная система трансцендентных уравнений, выраженных через функцию Лерха.

Описанию численного метода для решения систем трансцендентных уравнений для траекторий 1-го и 2-го рода и посвящена данная работа.

## Построение системы уравнений

Рассмотрим наблюдения объекта ( $i = 1, 2, 3$ ) в эклиптической системе координат:  $\rho_i$  — топоцентрическое расстояние до объекта,  $\lambda_i$  — долгота,  $\beta_i$  — широта, в плоскости эклиптики равная нулю. Каждому наблюдению соответствует момент времени  $t_i$ . Связь между топоцентрическими и гелиоцентрическими координатами объекта задаётся соотношением:

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{e}_i \rho_i - \mathbf{R}_i, \quad (1)$$

где  $\mathbf{r}_i$  — вектор положения объекта относительно центра притяжения,  $\rho_i$  — расстояние между наблюдателем и объектом;  $\mathbf{e}_i = \{\xi_i, \eta_i, \zeta_i\}$  — единичный вектор, направленный по лучу зрения наблюдателя, где  $\xi_i = \cos \lambda_i$ ,  $\eta_i = \sin \lambda_i$ ,  $\zeta_i = 0$ ;  $\mathbf{R}_i = \{-X_i, -Y_i, 0\}$  — вектор положения центра притяжения (Солнца) относительно наблюдателя ( $X_i, Y_i$  — гелиоцентрические координаты наблюдателя) в момент  $t_i$ .

Важным свойством прямолинейного движения является условие коллинеарности векторов положения объекта  $\mathbf{r}_i$ , которое устанавливает зависимости между расстояниями  $\rho_i$ .

Рассмотрим условие коллинеарности векторов  $\mathbf{r}_1$  и  $\mathbf{r}_2$ :

$$(\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2) = 0. \quad (2)$$

Векторное уравнение (2) в силу того, что оба вектора лежат в плоскости  $xu$ , имеет только одну нетривиальную компоненту  $z$ :

$$r_{1x} r_{2y} - r_{2x} r_{1y} = 0. \quad (3)$$

Подставим (1) в (3):

$$A_1 \rho_1 \rho_2 + B_1 \rho_1 + C_1 \rho_2 + D_1 = 0, \quad (4)$$

где

$$A_1 = e_{1x} e_{2y} - e_{1y} e_{2x}, \quad B_1 = e_{1y} X_2 - e_{1x} Y_2, \\ C_1 = e_{2x} Y_1 - e_{2y} X_1, \quad D_1 = X_1 Y_2 - Y_1 X_2.$$

Уравнение (4) имеет только один корень для  $\rho_1$ :

$$\rho_1 = -\frac{C_1 \rho_2 + D_1}{A_1 \rho_2 + B_1} = -\frac{(\mathbf{e}_2 \times \mathbf{R}_1)_z \rho_2 + (\mathbf{R}_1 \times \mathbf{R}_2)_z}{(\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2)_z \rho_2 - (\mathbf{e}_1 \times \mathbf{R}_2)_z}. \quad (5)$$

Уравнение (5) определяет дробно-линейное соотношение между двумя расстояниями от наблюдателя до объекта для любых прямолинейных орбит, лежащих в плоскости эклиптики.

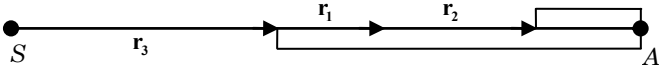


Рис. 1. Траектории движения 1-го и 2-го рода

Аналогично получим выражение для  $\rho_3$ :

$$\rho_3 = -\frac{B_2\rho_2 + D_2}{A_2\rho_2 + C_2} = -\frac{(\mathbf{e}_2 \times \mathbf{R}_3)_z \rho_2 - (\mathbf{R}_2 \times \mathbf{R}_3)_z}{(\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3)_z \rho_2 + (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{R}_3)_z}, \quad (6)$$

где  $A_2 = e_{2x}e_{3y} - e_{2y}e_{3x}$ ,  $B_2 = e_{2y}X_3 - e_{2x}Y_3$ ,

$C_2 = e_{3x}Y_2 - e_{3y}X_2$ ,  $D_2 = X_2Y_3 - Y_2X_3$ .

Для начала рассмотрим движение по траектории 2-го рода, поскольку она связана с тремя наблюдениями, то может быть разбита на два интервала  $[t_1, t_2]$  и  $[t_2, t_3]$ . Соответственно, мы получим два возможных варианта прохождения афелия: на первом или на втором участке (рис. 1, рис. 2), где  $S$  — фокус, в котором находится Солнце, а  $A$  — афелий орбиты (пустой фокус).

Здесь хорошо видно, что наша траектория разбивается на два участка первого (движение не меняет направление) и второго (происходит смена направления движения в точке  $A$ ) рода. Из различного порядка их следования получаем две системы уравнений  $\{f_{21}, f_{32}\}$ .

В первом случае (рис. 1) из интеграла живой силы получим после интегрирования, приведенного в [6], и перехода от  $\arcsin$  к  $\arccos$  [3] два уравнения,  $f_{21}$  — для траектории первого ряда и  $f_{32}$  — для второго:

$$f_{21} = \sqrt{a} \sqrt{2a(\rho_1^2 - 2(\mathbf{e}_1 \mathbf{R}_1)\rho_1 + R_1^2)^{1/2} - (\rho_1^2 - 2(\mathbf{e}_1 \mathbf{R}_1)\rho_1 + R_1^2)} - \sqrt{a} \sqrt{2a(\rho_2^2 - 2(\mathbf{e}_2 \mathbf{R}_2)\rho_2 + R_2^2)^{1/2} - (\rho_2^2 - 2(\mathbf{e}_2 \mathbf{R}_2)\rho_2 + R_2^2)} - \tau_{21} - kL(\rho_1 - \rho_2) + a^{3/2} \left[ \arccos \left( \frac{a - \sqrt{\rho_2^2 - 2(\mathbf{e}_2 \mathbf{R}_2)\rho_2 + R_2^2}}{a} \right) - \arccos \left( \frac{a - \sqrt{\rho_1^2 - 2(\mathbf{e}_1 \mathbf{R}_1)\rho_1 + R_1^2}}{a} \right) \right] = 0, \quad (7)$$

$$f_{32} = 2\pi a^{3/2} + \sqrt{a} \sqrt{2a(\rho_3^2 - 2(\mathbf{e}_3 \mathbf{R}_3)\rho_3 + R_3^2)^{1/2} - (\rho_3^2 - 2(\mathbf{e}_3 \mathbf{R}_3)\rho_3 + R_3^2)} + \sqrt{a} \sqrt{2a(\rho_2^2 - 2(\mathbf{e}_2 \mathbf{R}_2)\rho_2 + R_2^2)^{1/2} - (\rho_2^2 - 2(\mathbf{e}_2 \mathbf{R}_2)\rho_2 + R_2^2)} - \tau_{32} - kL(\rho_2 - \rho_3) - a^{3/2} \left[ \arccos \left( \frac{a - \sqrt{\rho_3^2 - 2(\mathbf{e}_3 \mathbf{R}_3)\rho_3 + R_3^2}}{a} \right) + \arccos \left( \frac{a - \sqrt{\rho_2^2 - 2(\mathbf{e}_2 \mathbf{R}_2)\rho_2 + R_2^2}}{a} \right) \right] = 0, \quad (8)$$

где  $\tau_{21} = k(t_2 - t_1)$ ,  $\tau_{32} = k(t_3 - t_2)$ ,

$k = 0.01720209895$  — постоянная Гаусса [1],

$L = 0.00576832$  [сут/а.е.] — абберационная постоянная.

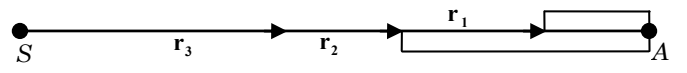


Рис. 2. Траектории движения 2-го и 1-го рода

Во втором случае (рис. 2), уравнения получаются аналогичным способом. Меняется лишь порядок, сначала идет траектория второго рода, а за ней — первого:

$$f_{21} = 2\pi a^{3/2} + \sqrt{a} \sqrt{2a(\rho_2^2 - 2(\mathbf{e}_2 \mathbf{R}_2)\rho_2 + R_2^2)^{1/2} - (\rho_2^2 - 2(\mathbf{e}_2 \mathbf{R}_2)\rho_2 + R_2^2)} + \sqrt{a} \sqrt{2a(\rho_1^2 - 2(\mathbf{e}_1 \mathbf{R}_1)\rho_1 + R_1^2)^{1/2} - (\rho_1^2 - 2(\mathbf{e}_1 \mathbf{R}_1)\rho_1 + R_1^2)} - \tau_{21} - kL(\rho_1 - \rho_2) - a^{3/2} \left[ \arccos \left( \frac{a - \sqrt{\rho_2^2 - 2(\mathbf{e}_2 \mathbf{R}_2)\rho_2 + R_2^2}}{a} \right) + \arccos \left( \frac{a - \sqrt{\rho_1^2 - 2(\mathbf{e}_1 \mathbf{R}_1)\rho_1 + R_1^2}}{a} \right) \right] = 0, \quad (9)$$

$$f_{32} = \sqrt{a} \sqrt{2a(\rho_3^2 - 2(\mathbf{e}_3 \mathbf{R}_3)\rho_3 + R_3^2)^{1/2} - (\rho_3^2 - 2(\mathbf{e}_3 \mathbf{R}_3)\rho_3 + R_3^2)} - \sqrt{a} \sqrt{2a(\rho_2^2 - 2(\mathbf{e}_2 \mathbf{R}_2)\rho_2 + R_2^2)^{1/2} - (\rho_2^2 - 2(\mathbf{e}_2 \mathbf{R}_2)\rho_2 + R_2^2)} - \tau_{32} - kL(\rho_2 - \rho_3) - a^{3/2} \left[ \arccos \left( \frac{a - \sqrt{\rho_2^2 - 2(\mathbf{e}_2 \mathbf{R}_2)\rho_2 + R_2^2}}{a} \right) - \arccos \left( \frac{a - \sqrt{\rho_3^2 - 2(\mathbf{e}_3 \mathbf{R}_3)\rho_3 + R_3^2}}{a} \right) \right] = 0. \quad (10)$$

Подставим (5) в (7) и (9), (6) в (8) и (10) и получим системы трансцендентных уравнений относительно  $\rho_2$  и  $a$ .

Теперь обратимся к движению по траектории 1-го рода, в общем случае, для всех типов движения. В работе [5] в качестве неизвестных рассматривались  $\rho_2$  и  $a$  — большая полуось. Однако последняя не очень подходит для универсального метода, т. к. имеет разрыв при переходе от эллиптического к гиперболическому движению. Если в качестве неизвестной взять ее обратную величину  $h = 1/a$ , то эта особенность исчезнет, и система из двух трансцендентных уравнений примет вид:

$$\begin{cases} f_1 = \left[ \sqrt{2r_1 r_2} + \frac{1}{\sqrt{8}} X(x_{21})(r_1 + 2\sqrt{r_1 r_2}(2x_{21} - 1) + r_2) \right] \sqrt{r_1 + 2\sqrt{r_1 r_2}(2x_{21} - 1) + r_2} - \tau_{21} - kL(\rho_1 - \rho_2), \\ f_2 = \left[ \sqrt{2r_2 r_3} + \frac{1}{\sqrt{8}} X(x_{32})(r_2 + 2\sqrt{r_2 r_3}(2x_{32} - 1) + r_3) \right] \sqrt{r_2 + 2\sqrt{r_2 r_3}(2x_{32} - 1) + r_3} - \tau_{32} - kL(\rho_2 - \rho_3). \end{cases} \quad (11)$$

Трансцендентная функция  $X$  может быть выражена через функцию Лерха  $\Phi$  [7]:

$$X(x) = \frac{\sqrt{1-x}(6x^2 - 51x + 64) + 4(6x^2 - 21x + 16)}{6(1-x)^{3/2}(\sqrt{1-x} + 1)^4} + \frac{3(1-\sqrt{1-x})}{6(1-x)^{3/2}(\sqrt{1-x} + 1)^4} \Phi\left(\frac{\sqrt{1-x}-1}{\sqrt{1-x}+1}, 1, \frac{5}{2}\right), \quad (12)$$

где  $\Phi$  определяется как:

$$\Phi(z, s, v) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(v+n)^s}, \quad z \in [-1, 1], \quad (13)$$

и тогда в (12) она представляется следующим образом:

$$\Phi\left(\frac{\sqrt{1-x}-1}{\sqrt{1-x}+1}, 1, \frac{5}{2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{2n+5} \left(\frac{\sqrt{1-x}-1}{\sqrt{1-x}+1}\right)^n. \quad (14)$$

Переменные  $x_{21}$  и  $x_{32}$  выражаются через значения радиус-векторов и  $h$  следующим образом:

$$x_{21} = \frac{1}{2} - \frac{h\sqrt{r_1 r_2} + \sqrt{r_1 r_2 h^2 - 2h(r_1 + r_2) + 4}}{4}, \quad (15)$$

$$x_{32} = \frac{1}{2} - \frac{h\sqrt{r_2 r_3} + \sqrt{r_2 r_3 h^2 - 2h(r_2 + r_3) + 4}}{4}. \quad (16)$$

Подставим (5) и (6) в (15) и (16), а их — в (11), и мы получим систему трансцендентных уравнений относительно  $\rho_2$  и  $h$ .

### Определение области поиска решения

Для решения полученных систем уравнений (7)–(8) и (9)–(10) необходимо ограничить область возможного поиска в положительном квадранте на плоскости  $\rho_2$  и  $a$ . Здесь мы можем воспользоваться геометрическими построениями, основанными на векторах направления на объект  $\mathbf{e}_i$  и движением наблюдателя в плоскости эклиптики [3]. Главным условием является то, что лучи наблюдений должны пересекать на плоскости искомую прямую. Так, если наблюдатель с каждым наблюдением удаляется от прямолинейной орбиты, то мы можем задать для первого наблюдения  $\rho_1 \in [0, +\infty]$ .

Из условия коллинеарности мы получаем:

$$\rho_{2\min} = \frac{(\mathbf{e}_2 \times \mathbf{R}_1)(\mathbf{R}_2 \times \mathbf{R}_1)}{(\mathbf{e}_2 \times \mathbf{R}_1)^2}, \quad (17)$$

$$\rho_{3\min} = \frac{(\mathbf{e}_3 \times \mathbf{R}_1)(\mathbf{R}_3 \times \mathbf{R}_1)}{(\mathbf{e}_3 \times \mathbf{R}_1)^2}. \quad (18)$$

Для оценки максимумов расстояний положим  $\rho_{1\max} = +\infty$ , тогда:

$$\rho_{2\max} = \frac{(\mathbf{R}_2 \times \mathbf{e}_1)(\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_1)}{(\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_1)^2}, \quad (19)$$

$$\rho_{3\max} = \frac{(\mathbf{R}_3 \times \mathbf{e}_1)(\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1)}{(\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1)^2}. \quad (20)$$

Далее, после подстановки (17), (18), (19) и (20) в (1) находим  $r_{2\min}$ ,  $r_{2\max}$ ,  $r_{3\min}$  и  $r_{3\max}$ . Затем полученные значения  $r$  подставляем в (8) или (10) и получаем соответствующие уравнения для  $a_{\min}$  и  $a_{\max}$ , которые можно решить любым численным методом [8]. В уравнениях (7)–(10) подкоренные выражения всегда неотрицательны и позволяют наложить дополнительные ограничения на интервал для  $a$  ( $i = 1, 2, 3$ ):

$$2ar_i - r_i^2 \geq 0. \quad (21)$$

Суммарную область, не удовлетворяющую этим условиям, мы в дальнейшем будем на рисунках закрашивать серым цветом.

Стоит отметить, что полученные граничные значения  $\rho$  не всегда могут гарантировать нахождение соответствующих граничных значений  $a$ . Если предельная нижняя граница нам всегда известна как  $a_{\min} = 0$ , то для верхней — вопрос всегда открыт. В случае, когда  $a_{\min} > 0$ , а  $a_{\max}$  не определяется, может быть полезен переход к переменной  $h = 1/a$ . Мы получаем интервал  $h \in [0, 1/a_{\min}]$ . Также, при получении универсальных решений для траекторий 1-го рода,  $h$  является более предпочтительной из-за отсутствия разрыва при переходе между различными типами движения.

Кроме приведённого выше геометрического подхода к определению границ области возможных решений, можно рассмотреть метод граничных траекторий. Он заключается в предположении, что какое-либо из наблюдений были произведено в момент прохождения афелия и соответствующая траектория 2-го рода превратится в *гранничную* [3].

Для максимального из возможных значений  $r_2 = 2a = 2/h$  получим:

$$\tau_{32} = \frac{r_2^{3/2}}{\sqrt{2}} \arccos \sqrt{\frac{r_3}{r_2} + \frac{\sqrt{r_2 r_3 (r_2 - r_3)}}{2}}. \quad (22)$$

Находим из (19) значение  $\rho_2 = \rho_{2\max}$  и подставляем в (8), откуда получаем  $a_{\max}$  ( $h_{\min}$ ). Если взять  $r_3 = 2a$ , то из (17) получим  $\rho_2 = \rho_{2\min}$  и после подстановки в (8) найдём  $a_{\min}$  ( $h_{\max}$ ).

Аналогичным способом находим граничные значения через  $r_2$ ,  $r_1$  и  $\tau_{21}$  для системы (9)–(10). Затем необходимо выбрать наименьшую область из полученных граничных значений.

$$\tau_{21} = \frac{r_2^{3/2}}{\sqrt{2}} \arccos \sqrt{\frac{r_1}{r_2} + \frac{\sqrt{r_2 r_1 (r_2 - r_1)}}{2}}. \quad (23)$$

Уравнения (22) и (23) нелинейные и их решения находятся любым численным методом [8].

Для решения системы уравнений (11) необходимо ограничить область возможного поиска в положительном квадранте на плоскости  $\rho_2$  и  $h$ . Пользуясь формулами, приведенными выше, получим  $\rho_{2\min}$ ,  $\rho_{3\min}$ ,  $\rho_{2\max}$  и  $\rho_{3\max}$ . Далее после подстановки (17), (18), (19) и (20) в (1) находим  $r_{2\min}$ ,  $r_{2\max}$ ,  $r_{3\min}$  и  $r_{3\max}$ . Затем полученные значения  $r$  подставляем во второе уравнение (11) и получаем соответствующие уравнения для  $x_{\max} = x_{32\max}$  и  $x_{\min} = x_{32\min}$  (из них после определяются  $h_{\max}$  и  $h_{\min}$ ), которые можно решить любым численным методом, например *методом продолжения решения по параметру с наилучшей параметризацией* [9]. Тогда для  $x = x_{32}$  получим систему ОДУ в виде:

$$\begin{cases} \frac{dx(s)}{ds} = -\frac{\sqrt{2}}{3}(r_2 + \sqrt{r_2 r_3} + r_3)\sqrt{r_2 - 2\sqrt{r_2 r_3} + r_3} + kL(\rho_2 - \rho_3) + \tau_{32}, \\ \frac{dv(s)}{ds} = -\frac{\sum_{i=0}^3 a_i x^i \Phi\left(\frac{\sqrt{1-x}-1}{\sqrt{1-x}+1}, 1, \frac{5}{2}\right) + \sum_{i=0}^3 b_i x^i \sqrt{1-x} + \sum_{i=0}^4 c_i x^i}{8\sqrt{r_2 + 2(2x-1)\sqrt{r_2 r_3} + r_3}(1-x+\sqrt{1-x})^5}, \end{cases} \quad (24)$$

где

$$\begin{cases} a_3 = 48\sqrt{2}\sqrt{r_2 r_3}, \\ a_2 = 36\sqrt{2}(\sqrt{r_2 r_3}(r_2 + r_3) - 2r_2 r_3), \\ a_1 = 6\sqrt{2}(r_2^2 + 10r_2 r_3 + r_3^2 - 6\sqrt{r_2 r_3}(r_2 + r_3)), \\ a_0 = 6\sqrt{2}(4\sqrt{r_2 r_3}(r_2 + r_3) - r_2^2 - 6r_2 r_3 - r_3^2), \\ b_3 = 40\sqrt{2}\sqrt{r_2 r_3}, \\ b_2 = 4\sqrt{2}(5(r_2^2 + r_3^2) - 52r_2 r_3 - 55(r_2 + r_3)), \\ b_1 = -4\sqrt{2}(25(r_2^2 + r_3^2) - 60r_2 r_3 - 43(r_2 + r_3)), \\ b_0 = -\sqrt{2}(100\sqrt{r_2 r_3}(r_2 + r_3) + 103(r_2^2 + r_3^2) + 106r_2 r_3). \end{cases} \quad (25)$$

$$\begin{cases} c_4 = -8\sqrt{2}\sqrt{r_2 r_3}(r_2 + r_3), \\ c_3 = -4\sqrt{2}(r_2^2 - 20r_2 r_3 + r_3^2 - 29(r_2 + r_3)), \\ c_2 = 8\sqrt{2}(7(r_2^2 + r_3^2) - 44r_2 r_3 - 39\sqrt{r_2 r_3}(r_2 + r_3)), \\ c_1 = 120\sqrt{2}\sqrt{r_2 r_3}(r_2 + r_3) - 151(r_2^2 + r_3^2) + 190r_2 r_3, \\ c_0 = -\sqrt{2}(100\sqrt{r_2 r_3}(r_2 + r_3) + 103(r_2^2 + r_3^2) + 106r_2 r_3). \end{cases} \quad (26)$$

После того как найдено  $x$ , можно легко определить соответствующее значение  $h$ :

$$h = \frac{8x(1-x)}{r_2 + 2\sqrt{r_2 r_3}(2x-1) + r_3}. \quad (27)$$

В уравнениях (11), (12), (15) и (16) подкоренные выражения всегда неотрицательны и это позволяет наложить дополнительные ограничения на область существования решения:

$$\begin{cases} r_1 + 2\sqrt{r_1 r_2}(2x_{21} - 1) + r_2 \geq 0, & r_2 + 2\sqrt{r_2 r_3}(2x_{32} - 1) + r_3 \geq 0, \\ r_1 r_2 h^2 - 2h(r_1 + r_2) + 4 \geq 0, & r_2 r_3 h^2 - 2h(r_2 + r_3) + 4 \geq 0. \end{cases} \quad (28)$$

Суммарная область, не удовлетворяющая этим условиям, далее на рисунках закрашена серым цветом.

### Триангуляция области решения

Для проведения поиска решений выбранная область разбивается на 100 прямоугольников  $10 \times 10$ . В свою очередь, каждый прямоугольник разбивается на 4 равнобедренных треугольника, с общей вершиной в его центре.

Таким образом, получаем всего 400 треугольников. Все вершины треугольников проверяются на выполнение условий (23) или (30). Если одна или две вершины не удовлетворяют условиям, то их координаты изменяются. Покажем это на примере одного треугольника.

1. Левая вершина не удовлетворяет условиям, переносим её на середину основания (рис. 3). Так же поступаем и с правой вершиной, если для нее не выполнено условие.

2. В случае средней вершины, опускаем её на половину высоты (рис. 4).

3. Если необходимо изменить положение одной из крайних вершин, например левой и средней, то крайнюю вершину переносим на середину основания, а среднюю опускаем на половину высоты и смещаем вправо на четверть длины основания треугольника (рис. 5).

4. Для изменения положения левой и правой вершин, смещаем каждую из них навстречу друг к другу на четверть длины основания так, что его длина сокращается вдвое, и поднимаем их на половину высоты в сторону средней вершины (рис. 6).

После успешной проверки всех вершин изменённые треугольники включаются в общее множество.

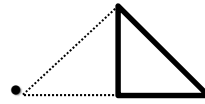


Рис. 3. Перенос левой вершины треугольника

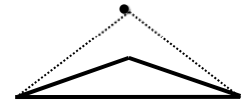


Рис. 4. Перенос средней вершины треугольника

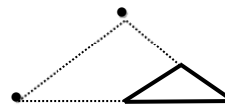


Рис. 5. Перенос левой и средней вершин треугольника

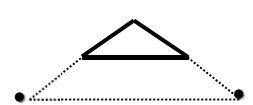


Рис. 6. Перенос левой и средней вершин треугольника

### Определение рангов треугольников

Полученное множество из нескольких сотен треугольников, с точки зрения перспективы поиска решений, можно разделить на несколько классов. В работе Самохина и Хуторовского [10] вводится понятие ранга треугольника. Авторы предлагают произвести двумерную линейную интерполяцию возможного решения по значениям функций  $f_{21}$  и  $f_{32}$  в вершинах треугольника, обозначим их как  $f_{21(i)}$  и  $f_{32(i)}$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Тогда координаты точки линейной интерполяции  $(\rho_{2(0)}, h_{(0)})$  можно выразить так:

$$\begin{cases} \rho_{2(0)} = \rho_{2(1)} + \xi(\rho_{2(2)} - \rho_{2(1)}) + \zeta(\rho_{2(3)} - \rho_{2(1)}), \\ h_{(0)} = h_{(1)} + \xi(h_{(2)} - h_{(1)}) + \zeta(h_{(3)} - h_{(1)}), \end{cases} \quad (29)$$

где  $(\rho_{2(i)}, h_{(i)})$  ( $i = 1, 2, 3$ ) — координаты соответствующих вершин,

$$\begin{cases} \xi = (f_{21(1)}f_{21(3)} - f_{21(1)}f_{32(3)})(f_{21(2)}f_{32(3)} - f_{21(1)}f_{32(2)} - \\ - f_{21(2)}f_{32(1)} - f_{21(3)}f_{32(2)} + f_{21(3)}f_{32(1)} + f_{21(1)}f_{32(2)})^{-1}, \\ \zeta = (f_{1(1)}f_{2(2)} - f_{2(1)}f_{1(2)})(f_{21(2)}f_{32(3)} - f_{21(1)}f_{32(3)} - \\ - f_{21(2)}f_{32(1)} - f_{21(3)}f_{32(2)} + f_{21(3)}f_{32(1)} + f_{21(1)}f_{32(2)})^{-1}. \end{cases} \quad (30)$$

Точка  $(\rho_{2(0)}, h_{(0)})$  будет внутри треугольника при выполнении следующих условий:

$$\xi > 0, \quad \zeta > 0, \quad \xi + \zeta < 1. \quad (31)$$

Указанная интерполяция является обобщением метода хорд для решения нелинейного уравнения с одной переменной. В результате интерполяции системы  $\{f_{21} = 0, f_{32} = 0\}$  получаем прямые линии, пересекающиеся в точке  $(\rho_{2(0)}, h_{(0)})$ , которые называются *линиями нулевого уровня*. При этом необходимо учесть, что подобная линеаризация при выполнении условий (31) не гарантирует существование реального решения внутри треугольника.

Опишем возможные ранги треугольников:

— 0 — ни одна из линий нулевого уровня не пересекает ни одной из сторон треугольника (значения  $f_{21}$  и  $f_{32}$  для всех вершин имеют один знак);

— 1 — только одна из линий нулевого уровня имеет пересечения со сторонами треугольника (значения либо  $f_{21}$ , либо  $f_{32}$  имеют разные знаки для разных вершин);

— 2 — обе линии нулевого уровня пересекают стороны треугольника, при этом точка  $(\rho_{2(0)}, h_{(0)})$  находится вне треугольника (значения  $f_{21}$  и  $f_{32}$  имеют разные знаки для разных вершин, но условия (31) не выполняются);

— 3 — точка  $(\rho_{2(0)}, h_{(0)})$  лежит внутри треугольника, но ни одна из сторон треугольника не пересекается ни одной из линий нулевого уровня (условия (23) выполняются, но суммы знаков про-

изведений значений  $f_{21}$  и  $f_{32}$  для вершин каждой из сторон нигде не равны нулю);

— 4 — точка  $(\rho_{2(0)}, h_{(0)})$  лежит внутри треугольника и все три стороны треугольника пересекаются с линиями нулевого уровня (условия (31) выполняются и есть стороны, для которых суммы знаков произведений значений  $f_{21}$  и  $f_{32}$  для их вершин равны нулю).

Подобное ранжирование необходимо для уменьшения объема вычислений. При наличии треугольников с рангом 4 и 3 поиск решения следует начать с них. При отсутствии результата или для проверки его полноты следует перейти к треугольникам с рангом 2. Обычно этого достаточно для нахождения всех приемлемых решений. К треугольникам с рангом 1 следует обращаться только в случае отсутствия решений, чтобы в этом окончательно убедиться.

### Метод Дэвидона – Флетчера – Пауэлла

Задача поиска решений систем (7)–(8), (9)–(10) и (11) приводит к поиску локального минимума целевой функции  $f_{\text{goal}}(\rho_2, h) = f_{21}(\rho_2, h)^2 + f_{32}(\rho_2, h)^2$ . В данной работе для этого используется метод Дэвидона – Флетчера – Пауэлла [11, 12]. В качестве необходимого условия требуется существование непрерывных частных производных целевой функции во всех точках области решений.

Метод Дэвидона – Флетчера – Пауэлла относится к квазиньютоновским методам оптимизации с переменной метрикой [13, 14]. В квазиньютоновских методах, приближение матрицы Гессе целевой функции на очередном шаге итерации строится на основе информации об изменении градиента на предыдущих шагах. Вектор  $\mathbf{p}_k$ , указывающий в точку минимума целевой функции на  $k$ -ом шаге, указывает направление наискорейшего спуска в метрике вектора, определяемой гессианом. В силу того, что матрица Гессе меняется на каждом шаге, то меняется и метрика вектора  $\mathbf{p}$  [15]. Описание алгоритма и текст программы на языке фортран представлены в [16, 17].

В качестве нулевого приближения задаем точку  $\mathbf{x}^{(0)} = \{\rho_2^{(0)}, h^{(0)}\}$  представляющую центр тяжести выбранного треугольника. Находим градиент целевой функции в этой точке  $\nabla f_{\text{goal}}(\mathbf{x}^{(0)})$ . Задаем  $\varepsilon_1$  — нижнюю границу нормы градиента целевой функции,  $\varepsilon_2$  — минимальное изменение координат точки  $\mathbf{x}$  и  $\varepsilon_3$  — минимальное изменение целевой функции между итерациями,  $M$  — предельное число итераций. В качестве начального значения для матрицы аппроксимации гессиана  $\mathbf{B}$  зададим единичную матрицу  $\mathbf{I}$ :  $\mathbf{B}^{(0)} = \mathbf{I}$ .

Далее, на каждом шаге итерации  $0 \leq k \leq M$  производим оценку нормы  $\|\nabla f_{\text{goal}}(\mathbf{x}^{(k)})\| < \varepsilon_1$ . В случае выполнения неравенства итерация прекращается  $\mathbf{x}_{\text{иск}} = \mathbf{x}^{(k)}$ .

Находим  $\mathbf{p}^{(k)} = -\mathbf{B}^{(k)}\nabla f_{\text{goal}}(\mathbf{x}^{(k)})$  и величину шага  $\alpha^{(k)}$  из решения задачи минимизации по  $\alpha$  функции  $f_{\text{goal}}(\mathbf{x}^{(k)} + \alpha\mathbf{p}^{(k)})$ .

Переходим в точку  $(k+1)$ :  $\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \alpha^{(k)}\mathbf{p}^{(k)}$  и  $\Delta\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}$ , затем получаем

$$\Delta\mathbf{g}^{(k)} = \nabla f_{\text{goal}}(\mathbf{x}^{(k+1)}) - \nabla f_{\text{goal}}(\mathbf{x}^{(k)})$$

и

$$\mathbf{B}^{(k+1)} = \mathbf{B}^{(k)} - \frac{\mathbf{B}^{(k)}\Delta\mathbf{g}^{(k)}\left(\Delta\mathbf{g}^{(k)}\right)^T\mathbf{B}^{(k)}}{\left(\Delta\mathbf{g}^{(k)}\right)^T\mathbf{B}^{(k)}\Delta\mathbf{g}^{(k)}} + \frac{\Delta\mathbf{x}^{(k)}\left(\Delta\mathbf{x}^{(k)}\right)^T}{\left(\Delta\mathbf{x}^{(k)}\right)^T\Delta\mathbf{g}^{(k)}}. \quad (32)$$

Проводим проверку условий  $\|\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}\| < \varepsilon_2$  и  $|f_{\text{goal}}(\mathbf{x}^{(k+1)}) - f_{\text{goal}}(\mathbf{x}^{(k)})| < \varepsilon_3$ . Если оба неравенства выполняются, то расчет окончен и  $\mathbf{x}_{\text{иск}} = \mathbf{x}^{(k+1)}$ . Иначе переходим к следующей итерации.

### Поиск решений и представление наблюдений

Как было описано в разделе «Определение рангов треугольников», поиск решений осуществляется по всем треугольникам с рангами 4 и 3, если таковые имеются, и 2, если в этом есть необходимость. Решения ищутся в центре тяжести каждого треугольника. Полученные решения необходимо попарно сравнить и отбросить кратные. Условием кратности будет расстояние между решениями меньше заданного малого числа. После подстановки  $\rho_2$  в (1) определим  $\mathbf{r}_2$  и соответственно  $r_2$ , а из (5) и (6) найдем  $\rho_1$  и  $\rho_3$ . Из  $a = 1/h$  определяем большую полуось. Затем находим  $r_1$  и  $r_3$  из (7) и (8), (9) и (10) с помощью тех же методов, что и ранее.

Уравнения (11) для этого не являются оптимальными, т. к. могут иметь два решения. Но так как нам известен тип движения, то мы можем воспользоваться соответствующими уравнениями [3] для эллиптического типа:

$$\alpha^{3/2}\left(\arccos\left(\frac{a-r_2}{a}\right) - \arccos\left(\frac{a-r_1}{a}\right)\right) - \sqrt{a}\left[\sqrt{2ar_2-r_2^2} - \sqrt{2ar_1-r_1^2}\right] + \tau_{21} + kL(\rho_1 - \rho_2) = 0, \quad (33)$$

$$\alpha^{3/2}\left(\arccos\left(\frac{a-r_3}{a}\right) - \arccos\left(\frac{a-r_2}{a}\right)\right) - \sqrt{a}\left[\sqrt{2ar_3-r_3^2} - \sqrt{2ar_2-r_2^2}\right] + \tau_{32} + kL(\rho_2 - \rho_3) = 0 \quad (34)$$

и для гиперболического:

$$(-a)^{3/2}\left(\ln(-a+r_1+\sqrt{r_1^2-2ar_1}) - \ln(-a+r_2+\sqrt{r_2^2-2ar_2})\right) + \sqrt{-a}\left[\sqrt{r_1^2-2ar_1} - \sqrt{r_2^2-2ar_2}\right] + \tau_{21} + kL(\rho_1 - \rho_2) = 0, \quad (35)$$

$$(-a)^{3/2}\left(\ln(-a+r_2+\sqrt{r_2^2-2ar_2}) - \ln(-a+r_3+\sqrt{r_3^2-2ar_3})\right) + \sqrt{-a}\left[\sqrt{r_2^2-2ar_2} - \sqrt{r_3^2-2ar_3}\right] + \tau_{32} + kL(\rho_2 - \rho_3) = 0. \quad (36)$$

Уравнения можно решить уже упомянутым выше методом продолжения решения по параметру [9].

По  $\mathbf{r}_1$  и  $\mathbf{r}_3$  для  $t_1$  и  $t_3$  вычисляем значения эллиптических долгот  $\lambda_1^C$  и  $\lambda_3^C$ , сравнение которых с наблюдаемыми  $\lambda_1^O$  и  $\lambda_3^O$  дает представление о точности полученного решения.

### Численные примеры

#### Пример 1

Рассмотрим модельный пример (4.7.1) движения по траектории 2-го рода (рис. 1), описанный в [3]. Объект движется от Солнца по орбите с элементами:  $a = 1.0$  а. е. ( $h = 1.0$  а. е.<sup>-1</sup>),  $\Omega = 90^\circ$ . Здесь первое и второе наблюдения сделаны до прохождения афелия, а третье — после (табл. 1). Здесь время отсчитывается в сутках от момента первого наблюдения. Наблюдения представлены одной эклиптической координатой — долготой  $\lambda$  (град.). Расстояния от Солнца  $r$  для каждого наблюдения и эклиптические координаты Солнца в осях  $\{X, Y\}$  представлены в астрономических единицах.

Таблица 1  
Наблюдения объекта, расстояния от Солнца и эклиптические координаты Солнца

$t$ , сутки	$\lambda$ , градусы	$r$ , а. е.	$X$ , а. е.	$Y$ , а. е.
0.0	75.26449	1.9500	-0.258819	-0.965926
20.1837867	63.94030	1.9900	-0.572050	-0.820219
39.6427879	60.57289	1.9800	-0.961096	-0.276216

Область поиска решений определялась следующим образом. По уравнениям (17) и (19) вычислены геометрические ограничения  $\rho_2$ :  $\rho_{2\min} = 0.5180$  а. е.,  $\rho_{2\max} = 3.8800$  а. е. Из (18) и (20) получены границы  $\rho_3$ :  $\rho_{3\min} = 1.2241$  а. е.,  $\rho_{3\max} = 3.9420$  а. е., а по ним интервалы для  $r_2$  и  $r_3$ :  $r_2 \in [1.3309, 4.4521]$ ,  $r_3 \in [1.3897, 3.8357]$ . Решение (8) методом хорд при заданных  $r_{2\min}$  и  $r_{3\min}$  дало  $h_{\max} = 1.4310$ . Для граничного уравнения (21) мы получили  $\rho_{2\max} = 1.5727$  а. е. и  $r_{2\max} = 2.2362$  а. е., а из (6)  $\rho_{3\max} = 2.1930$  а. е. и  $r_{3\max} = 2.1894$  а. е. Решение (8) при этих значениях  $r_{2\max}$  и  $r_{3\max}$  дало  $h_{\min} = 0.8944$ . Окончательно область поиска решений была получена как  $\rho_2 \in [0.5180, 1.5727]$  и  $h \in [0.8944, 1.4310]$  (рис. 7).

Большая часть прямоугольной области на рис. 7 окрашена в серый цвет и может не учитываться при триангуляции. Ранжирование треугольников дает: 0 — четвертого ранга, 0 — третьего, 1 — второго, 10 — первого и 161 — нулевого.

Поиск минимумов целевой функции производился методом Девидона – Флетчера – Пауэлла при следующих заданных параметрах:  $\varepsilon_1 = 10^{-13}$ ,  $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 10^{-15}$ ,  $M = 1000$ . Для треугольника второго ранга за 22 итерации было найдено решение:

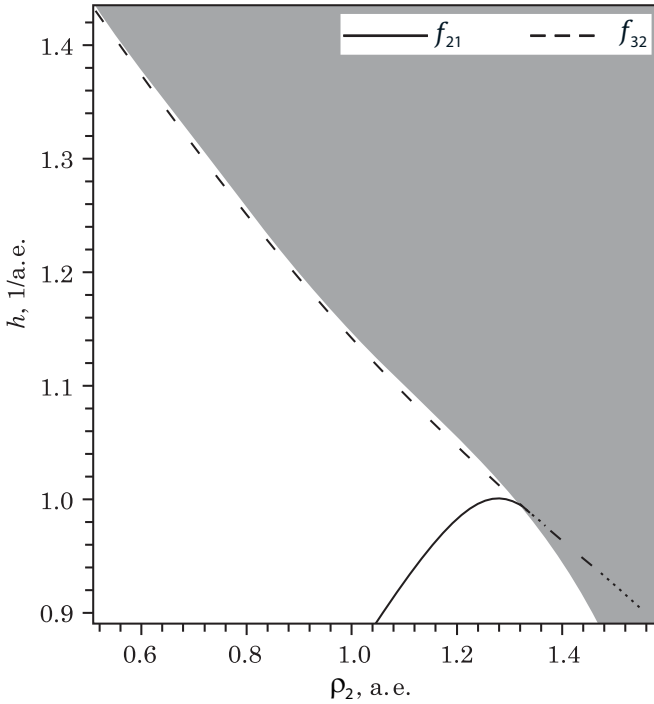


Рис. 7. Графики уравнений (7) и (8) в области поиска решения

$\rho_2 = 1.30218$  а. е.,  $h = 1.00000$  а. е.<sup>-1</sup>. Так как возможно только одно решение, то на этом поиски были прекращены. В случае если бы не было треугольника второго ранга, то необходимо было бы провести поиск во всех 10 треугольниках первого.

Полученная прямолинейная орбита имеет параметры  $a = 1.00000$  а. е.,  $\Omega = 90^\circ$ ,  $r_1 = 1.9500$  а. е.,  $r_2 = 1.9900$  а. е.,  $r_3 = 1.9800$  а. е. Отсюда нашли «O-C» для  $\lambda_1$  и  $\lambda_3$ :  $\lambda_1^{O-C} = 0.23''$  и  $\lambda_3^{O-C} = 0.34''$ .

**Пример 2**

Рассмотрим модельный пример (4.7.2) движения по траектории 2-го рода, описанный в [3]. Объект движется от Солнца по такой же орбите, как и в примере 1 с элементами:  $a = 1.0$  а. е. ( $h = 1.0$  а. е.<sup>-1</sup>),  $\Omega = 90^\circ$ . Отличие в том, что первое наблюдение сделано до прохождения афелия, а второе и третье — после (рис. 2, табл. 2). Здесь время отсчитывается в сутках, от момента первого наблюдения. Наблюдения представлены одной эклиптической координатой — долготой  $\lambda$  (град.). Расстояния от Солнца  $r$  для каждого наблюдения и эклиптические координаты Солнца в осях  $\{X, Y\}$  представлены в астрономических единицах.

Таблица 2

Наблюдения объекта, расстояния от Солнца и эклиптические координаты Солнца

$t$ , сутки	$\lambda$ , градусы	$r$ , а. е.	$X$ , а. е.	$Y$ , а. е.
0.0	75.81638	1.9900	-0.258819	-0.965926
39.6427879	59.83457	1.9800	-0.809757	-0.586765
53.0410366	59.46526	1.9500	-0.922388	-0.386266

Определим область поиска решений. Уравнения (17) и (19) дают следующие геометрические ограничения  $\rho_2$ :  $\rho_{2min} = 0.8888$  а. е.,  $\rho_{2max} = 3.3736$  а. е. Соответственно, из (18) и (20) получим границы  $\rho_3$ :  $\rho_{3min} = 1.1083$  а. е.,  $\rho_{3max} = 3.5127$  а. е. Отсюда находим интервалы для  $r_2$  и  $r_3$ :  $r_2 \in [1.3309, 4.4521]$ ,  $r_3 \in [1.3897, 3.8357]$ . (10) при заданных  $r_{2min}$  и  $r_{3min}$  не имеет решения. Тот же подход для граничного уравнения (22) дает  $\rho_{2max} = 1.6495$  а. е. и  $r_{2max} = 2.0130$  а. е. Затем из (5) получаем  $\rho_{1max} = 1.1365$  а. е. и  $r_{1max} = 2.0679$  а. е. Решение (10) при этих значениях  $r_{1max}$  и  $r_{2max}$  дает  $h_{min} = 0.9672$ . Разрешим аналог (22) ( $2a = r_1$ ) для  $\rho_{2min}$ . Получаем  $\rho_{2min} = 1.5417$  а. е. и  $r_{2min} = 1.9200$  а. е. Из (5) получаем  $\rho_{1min} = 0.9180$  а. е. и  $r_{1min} = 1.8563$  а. е. Решение (10) при этих значениях  $r_{1min}$  и  $r_{2min}$  дает  $h_{max} = 1.0417$ . Окончательно определяем область поиска решений как  $\rho_2 \in [1.5417, 1.6495]$  и  $h \in [0.9672, 1.0417]$  (рис. 8).

Как и в первом примере, заметная часть прямоугольной области на рис. 8 окрашена в серый цвет и может не учитываться при триангуляции. Ранжирование треугольников дает: 1 — четвертого ранга, 0 — третьего, 10 — второго, 23 — первого и 203 — нулевого.

Поиск минимумов целевой функции производился методом Девидона – Флетчера – Пауэлла при тех же заданных параметрах, что и в первом примере. Для треугольника четвертого ранга за

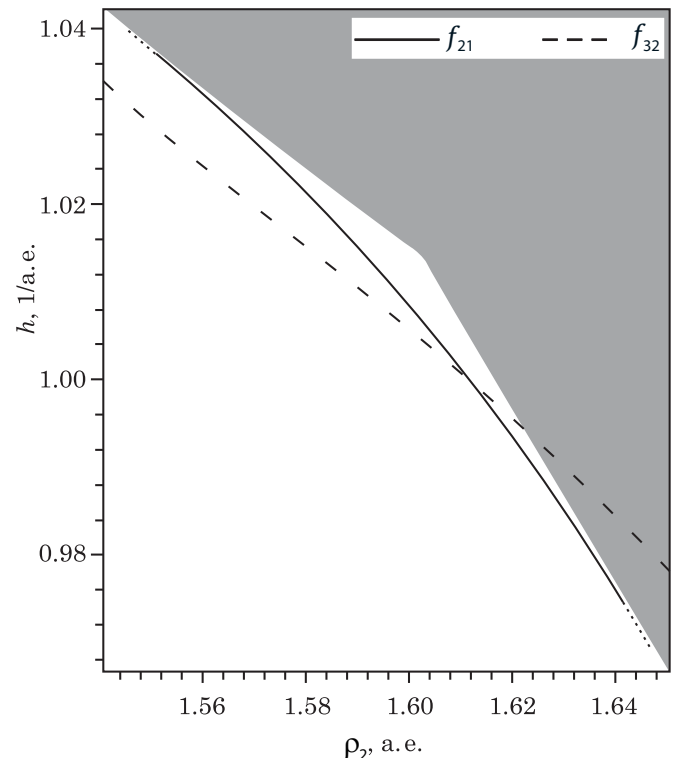


Рис. 8. Графики уравнений (9) и (10) в области поиска решения



23 итерации было найдено решение:  $\rho_2 = 1.61148$  а. е.,  $h = 0.99999$  а. е.<sup>-1</sup>. Так как возможно только одно решение, то на этом поиски были прекращены. В случае если бы не было треугольника четвертого ранга, то необходимо было бы провести поиск во всех 10 треугольниках второго.

Полученная прямолинейная орбита имеет параметры  $a = 1.00001$  а. е.,  $\Omega = 90^\circ$ ,  $r_1 = 1.9900$  а. е.,  $r_2 = 1.9800$  а. е.,  $r_3 = 1.9500$  а. е. Отсюда нашли «O-C» для  $\lambda_1$  и  $\lambda_3$ :  $\lambda_1^{O-C} = 0.0''$  и  $\lambda_3^{O-C} = 0.0''$ .

**Пример 3**

Рассмотрим модельный пример (4.6.1) движения по траектории 1-го рода, описанный в [3]. Объект движется к Солнцу по орбите с элементами:  $a = 4.0$  а. е. ( $h = 0.25$  а. е.<sup>-1</sup>),  $\Omega = 90^\circ$  (табл. 3). Здесь время отсчитывается в сутках от момента первого наблюдения. Наблюдения представлены одной эклиптической координатой — долготой  $\lambda$ , в градусах. Расстояния от Солнца  $r$  для каждого наблюдения и эклиптические координаты Солнца в осях  $\{X, Y\}$  представлены в астрономических единицах.

Определим область поиска решений. Уравнения (17) и (19) дают следующие геометрические ограничения для  $\rho_2$ :  $\rho_{2min} = 0.8350$  а. е.,  $\rho_{2max} = 2.5477$  а. е. Соответственно, из (18) и (20) получим границы для  $\rho_3$ :  $\rho_{3min} = 1.1724$  а. е.,  $\rho_{3max} = 1.9752$  а. е. Отсюда определим интервалы для  $r_2$  и  $r_3$ :  $r_2 \in [1.4058, 2.8883]$ ,  $r_3 \in [1.1376, 1.9752]$ . Решение второго уравнения (11) методом продолжения решения по параметру с наилучшей параметризацией при заданных  $r_{2min}$  и  $r_{3min}$  дало  $x_{max} = 0.0137$ , и из (29) получим  $h_{max} = 1.2956$ . Решение второго уравнения (11) для  $r_{2max}$  и  $r_{3max}$  дало  $x_{min} = -0.0065$ , и из (29) получили  $h_{min} = -2.1481$ . Окончательно определяем область поиска решений как  $\rho_2 \in [0.8350, 2.5477]$  и  $h \in [-2.1481, 1.2956]$  (рис. 9).

Часть правого верхнего угла прямоугольной области на рис. 9 серого цвета и может не учитываться при триангуляции. Ранжирование треугольников дает: 1 — четвертого ранга, 1 — третьего ранга, 7 — второго, 55 — первого и 265 — нулевого.

Таблица 3

Наблюдения объекта, расстояния от Солнца и эклиптические координаты Солнца

$t$ , сутки	$\lambda$ , градусы	$r$ , а. е.	$X$ , а. е.	$Y$ , а. е.
0.0	80.42361	2.5000	-0.258819	-0.965926
36.3688614	60.46395	2.0000	-0.775445	-0.631415
67.1242260	53.72305	1.5000	-0.988116	-0.153708

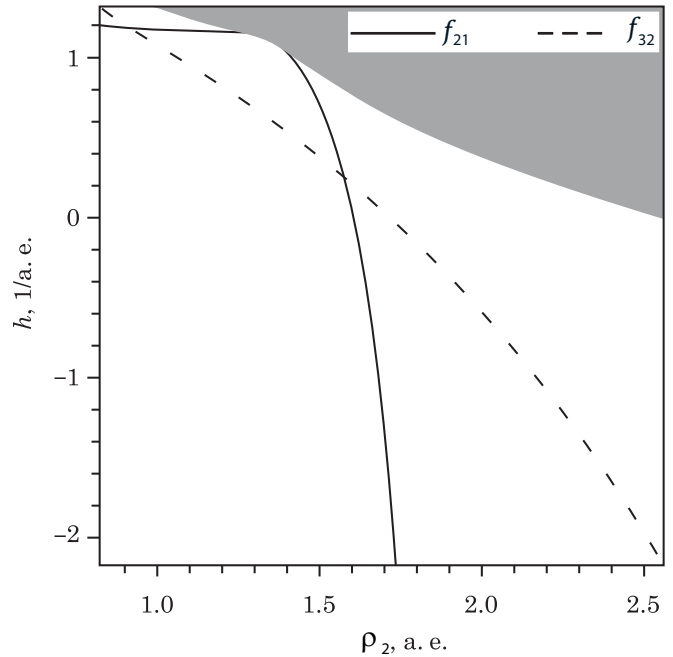


Рис. 9. Графики уравнений (11) в области поиска решения

Поиск минимумов целевой функции производился методом Дэвидона – Флетчера – Пауэлла при тех же заданных параметрах, что и в предыдущих примерах. Для треугольника четвертого ранга за 23 итерации было найдено решение:  $\rho_2 = 0.92789$  а. е.,  $h = 1.18483$  а. е.<sup>-1</sup>. Для треугольника третьего ранга за 31 итерацию было найдено решение:  $\rho_2 = 1.57301$  а. е.,  $h = 0.24996$  а. е.<sup>-1</sup>. Так как возможны только два различных решения, то на этом поиски были прекращены. В случае если бы они совпали, то необходимо было бы провести поиск во всех 7 треугольниках второго ранга.

Для первого решения из (1) было найдено  $r_2 = 2.0000$  а. е. Из (5) и (6) мы получили  $\rho_1 = 1.55577$  а. е. и  $\rho_3 = 1.66700$  а. е. Затем разрешили уравнения (33) и (34) относительно  $r_1$  и  $r_3$ . Последние приняли следующие значения:  $r_1 = 1.6512$  а. е.,  $r_3 = 1.1806$  а. е. Из (1) видно, что динамическое значение  $r_1$  не согласуется с  $\rho_1$  и данное решение нереально.

Для второго решения из (1) было найдено  $r_2 = 1.4735$  а. е. Из (5) и (6) мы получили  $\rho_1 = 0.11788$  а. е. и  $\rho_3 = 1.23932$  а. е. Затем разрешили уравнения (33) и (34) относительно  $r_1$  и  $r_3$ . Они приняли значения  $r_1 = 2.5000$  а. е.,  $r_3 = 1.5000$  а. е. Отсюда нашли «O-C» для  $\lambda_1$  и  $\lambda_3$ :  $\lambda_1^{O-C} = 0.0''$  и  $\lambda_3^{O-C} = 0.0''$ . Следовательно, второе решение является искомым.

Полученная прямолинейно-эллиптическая орбита имеет параметры  $a = 4.00000$  а. е.,  $\Omega = 90^\circ$ ,  $r_1 = 2.5000$  а. е.,  $r_2 = 2.0000$  а. е.,  $r_3 = 1.5000$  а. е.

## Пример 4

Рассмотрим модельный пример (4.8.1), описанный в [3]. Объект движется к Солнцу по прямолинейно-гиперболической орбите с элементами:  $a = -4.0$  а. е. ( $h = -0.25$  а. е.<sup>-1</sup>),  $\Omega = 90^\circ$  (табл. 4). Здесь время отсчитывается в сутках от момента первого наблюдения. Наблюдения представлены одной эллиптической координатой — долготой  $\lambda$  (в град.). Расстояния от Солнца  $r$  для каждого наблюдения и эллиптические координаты Солнца в осях  $\{X, Y\}$  представлены в астрономических единицах.

Определим область поиска решений. Уравнения (17) и (19) дают следующие геометрические ограничения для  $\rho_2$ :  $\rho_{2\min} = 0.8178$  а. е.,  $\rho_{2\max} = 3.2104$  а. е. Соответственно, из (18) и (20) получим границы для  $\rho_3$ :  $\rho_{3\min} = 1.1805$  а. е.,  $\rho_{3\max} = 2.5869$  а. е. Отсюда найдем интервалы для  $r_2$  и  $r_3$ :  $r_2 \in [1.5341, 3.7407]$ ,  $r_3 \in [1.4046, 1.6020]$ . Решение второго уравнения (11) методом продолжения решения по параметру с наилучшей параметризацией при заданных  $r_{2\min}$  и  $r_{3\min}$  дало  $x_{\max} = 0.0080$  и из (29) мы получили  $h_{\max} = 1.2740$ . Решение второго уравнения (11) для  $r_{2\max}$  и  $r_{3\max}$  дало  $x_{\min} = -0.0074$ , и из (29) было получено  $h_{\min} = -5.2783$ . Окончательно определена область поиска решений как  $\rho_2 \in [0.8178, 3.2104]$  и  $h \in [-5.2783, 1.2740]$  (рис. 10).

Как и в третьем примере, часть правого верхнего угла прямоугольной области на рис. 10 окрашена в серый цвет и может не учитываться при триангуляции. Ранжирование треугольников дало: 1 — четвертого ранга, 1 — третьего, 6 — второго, 69 — первого и 289 — нулевого.

Поиск минимумов целевой функции производился методом Дэвидона – Флетчера – Пауэлла при тех же заданных параметрах, что и в предыдущих примерах. Для треугольника четвертого ранга за 27 итераций было найдено решение:  $\rho_2 = 1.35735$  а. е.,  $h = 0.69542$  а. е.<sup>-1</sup>. Для треугольника третьего ранга за 29 итераций было найдено решение:  $\rho_2 = 1.91083$  а. е.,  $h = -0.25002$  а. е.<sup>-1</sup>. Так как возможны только два различных решения, то на этом поиски были прекращены. В случае если бы они совпали, необходимо было бы провести поиск во всех шести треугольниках второго ранга.

Таблица 4

Наблюдения объекта, расстояния от Солнца и эллиптические координаты Солнца

$t$ , сутки	$\lambda$ , градусы	$r$ , а. е.	$X$ , а. е.	$Y$ , а. е.
0.0	82.74856	3.0000	-0.258819	-0.965926
29.3889192	68.69606	2.5000	-0.694231	-0.719753
56.6070280	60.52800	2.0000	-0.944332	-0.328993

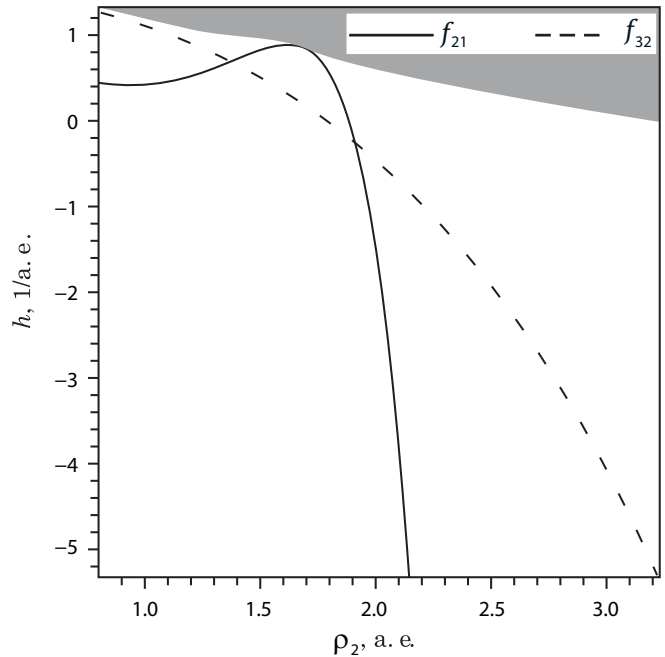


Рис. 10. Графики уравнений (11) в области поиска решения

Для первого решения из (1) было найдено  $r_2 = 1.9945$  а. е. Из (5) и (6) мы получили  $\rho_1 = 0.70976$  а. е. и  $\rho_3 = 1.57008$  а. е. Затем были решены уравнения (33) и (34) относительно  $r_1$  и  $r_3$ . Они приняли значения  $r_1 = 2.2452$  а. е.,  $r_3 = 1.7046$  а. е. Из (1) видно, что динамическое значение  $r_1$  не согласуется с  $\rho_1$  и данное решение не реально.

Для второго решения из (1) было найдено  $r_2 = 1.4735$  а. е. Из (5) и (6) мы получили  $\rho_1 = 2.0504$  а. е. и  $\rho_3 = 1.91939$  а. е. Затем были решены уравнения (35) и (36) относительно  $r_1$  и  $r_3$ . Они приняли значения  $r_1 = 3.0000$  а. е.,  $r_3 = 2.0000$  а. е. Отсюда нашли «O-C» для  $\lambda_1$  и  $\lambda_3$ :  $\lambda_1^{O-C} = 0.0''$  и  $\lambda_3^{O-C} = 0.0''$ . Следовательно, второе решение является искомым.

Полученная прямолинейно-гиперболическая орбита имеет параметры  $a = -4.00000$  а. е.,  $\Omega = 90^\circ$ ,  $r_1 = 3.0000$  а. е.,  $r_2 = 2.5000$  а. е.,  $r_3 = 2.0000$  а. е.

## Заключение

Представленный в данной работе метод, позволяет определить прямолинейную орбиту в плоскости эклиптики по трем наблюдениям. В статье рассмотрены все возможные случаи для движения по траекториям 1-го и 2-го рода. Достоинством метода является возможность определять предварительную орбиту без наличия априорной информации о типе прямолинейного движения.

## Литература

1. *Sundman K. F.* Über die Bestimmung geradlinger Bahnen // Vierteljahresschrift der Astronomischen Gesellschaft. Leipzig: Verlag von Wilhelm Engelmann. 1935. Vol. 70. no. 4. P. 318–323.
2. *Кузнецов В. Б.* Определение прямолинейной орбиты // Труды ИПА РАН. 2004. Вып. 11. С. 200–205.
3. *Кузнецов В. Б.* Определение прямолинейной орбиты. Задача двух тел. LAP Lambert Academic Publishing, 2014. С. 80.
4. *Охоцимский Д. Е., Сихарулидзе Ю. Г.* Основы механики космического полёта. М.: Наука, 1990.
5. *Кузнецов В. Б.* К вопросу об определении предварительной орбиты небесного тела // Астрономический вестник. 2019. Т. 53, № 6. С. 456–466.
6. *Дубошин Г. Н.* Небесная механика. Основные задачи и методы. М.: Наука, 1975.
7. *Lerch M.* Note sur la fonction  $\mathfrak{K}(w, x, s) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{2\pi i k x} (w + k)^{-s}$  // Acta Math. 1887. Vol. 11. P. 19–24.
8. *Арушанян О. Б.* Научно-образовательный интернет-ресурс НИВЦ МГУ по численному анализу. Библиотека численного анализа. Решение одного уравнения общего вида. URL: [http://num-anal.srcc.msu.ru/lib\\_na/cat/cat111.htm](http://num-anal.srcc.msu.ru/lib_na/cat/cat111.htm) (дата обращения 06.06.2020).
9. *Шалашилин В. И., Кузнецов Е. Б.* Метод продолжения решения по параметру и наилучшая параметризация (в прикладной математике и механике). М.: Эдиториал УРСС, 1999. 224 с.
10. *Самтохин А. С., Хуторовский З. Н.* Метод первоначального определения параметров околоземных орбит по трем угловым измерениям // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. 2014. № 44. 31 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2014-44> (дата обращения 06.06.2020).
11. *Davidon W. C.* Variable metric methods for minimization // A. E. C. Res. and Develop. Rept. ANL-5990, Argonne Nat'l. Illinois: Lab. Argonne, 1959.
12. *Fletcher R., Powell M. J. D.* A rapidly convergent descent method for minimization // Computer J. 1963. Vol. 6. P. 163–168.
13. *Химмельблау Д.* Прикладное нелинейное программирование. М.: Мир, 1975.
14. *Пантелеев А. В., Летова Т. А.* Методы оптимизации в примерах и задачах. М.: Высшая школа, 2005.
15. *Гилл Ф., Моррей У., Райт М.* Практическая оптимизация. М.: Мир, 1985.
16. *Арушанян О. Б.* Научно-образовательный интернет-ресурс НИВЦ МГУ по численному анализу. URL: [http://num-anal.srcc.msu.ru/lib\\_na/cat/mn/mnr6r.htm](http://num-anal.srcc.msu.ru/lib_na/cat/mn/mnr6r.htm) (дата обращения 06.06.2020).
17. *Потемкин В.* Язык программирования FORTRAN. URL: <http://fortran-90.pvbk.spb.ru/min.html#FM31>, 2005.