

**“Активные ядра галактик как суперколлайдеры  
элементарных частиц”**

А. А. Гриб<sup>a,b</sup>, Ю. В. Павлов<sup>a,c</sup>

<sup>a</sup>Фридмановская лаборатория теоретической физики,

<sup>b</sup>РГПУ им. А. И. Герцена,

<sup>c</sup>Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург

## Рождение частиц гравитационным полем.

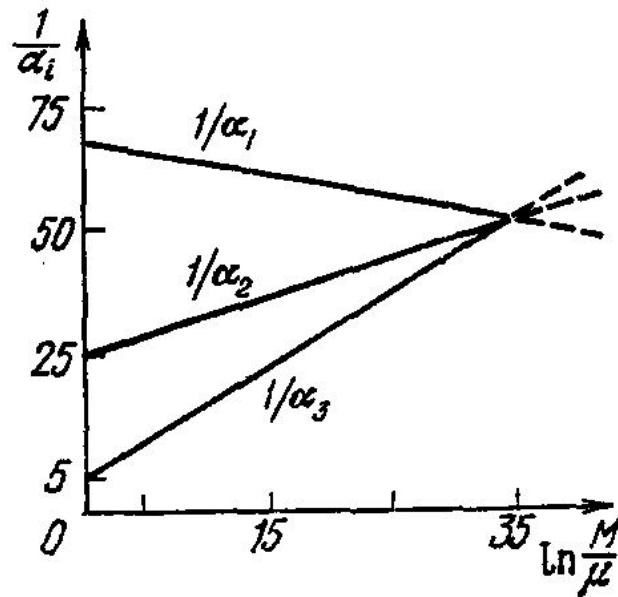


Рис. 1: Зависимость эффективных “постоянных” взаимодействий от энергии.

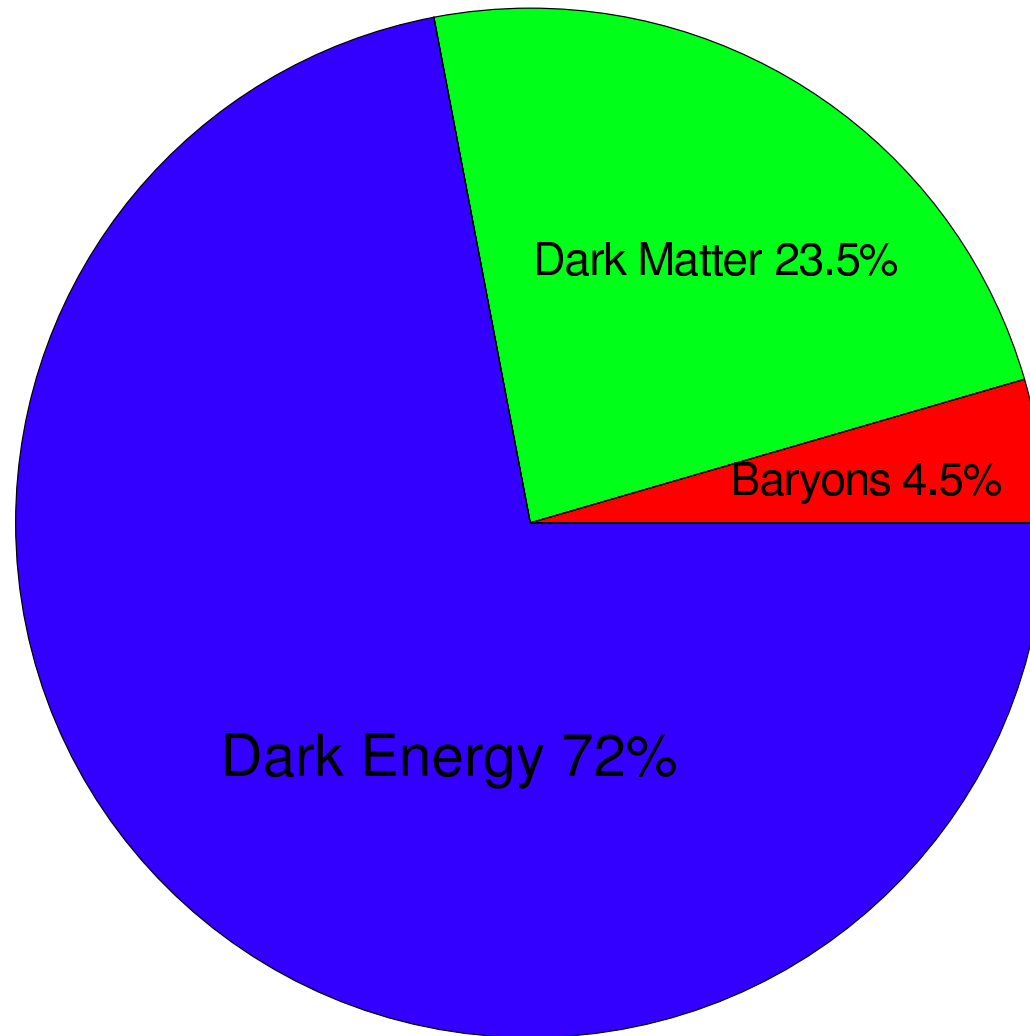
1) Гравитационное поле ранней Вселенной рождает из вакуума сверхтяжелые частицы массы, которых порядка масштаба Великого объединения.

Для  $M \approx 10^{14}$  ГэВ рождается порядка  $10^{80}$  частиц.

(Теория рождения частиц в гравитационном поле изложена, например, в

А. А. Гриб, С. Г. Мамаев, В. М. Мостепаненко. *Вакуумные квантовые эффекты в сильных полях*. М.: Энергоатомиздат, 1988.)

## Standard Cosmological Model



2) Распадаясь в ранней Вселенной, сверхтяжелые частицы создают барионный заряд Вселенной и наблюдаемую энтропию.

3) Небольшая доля  $\approx 10^{-14}$  сверхтяжелых частиц доживает до наших дней и составляет тёмную материю (всю или некоторую её часть).

4) Распадаясь в нашу эпоху сверхтяжелые частицы создают наблюдаемый поток космических лучей сверхвысокой энергии.

*A. A. Grib, Yu. V. Pavlov*, Int. J. Mod. Phys. **D 11** (2002), 433–436;  
 Int. J. Mod. Phys. **A 17** (2002), 4435–4439;  
 Gravit. & Cosmology **8** (2002), Suppl., 148–153.  
 Gravit. & Cosmology **12** (2006) 159–162.  
 Gravit. & Cosmology, **14** (2008), 1–7.  
 Mod. Phys. Lett. **A 23** (2008), 1151–1159.  
 Gravit. & Cosmology, **15** (2009), 44–48.

## Pierre Auger Observatory

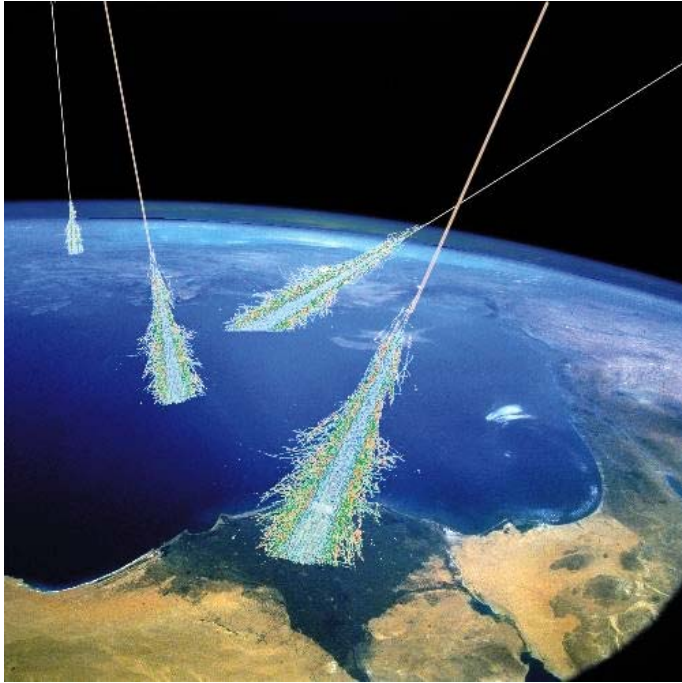


Рис. 2: The Pierre Auger Observatory is a hybrid detector. On the hill is one of the 4 Fluorescence Detector buildings and communications tower. In the bottom foreground is one of the 1,600 Surface Detectors – water tanks (12,000 liter), each tank is separated from each of its neighbors by 1.5 kilometers.

*Pierre Auger Collaboration*, Science 2007, Vol.318, 938–943. “Correlation of the Highest-Energy Cosmic Rays with Nearby Extragalactic Objects”

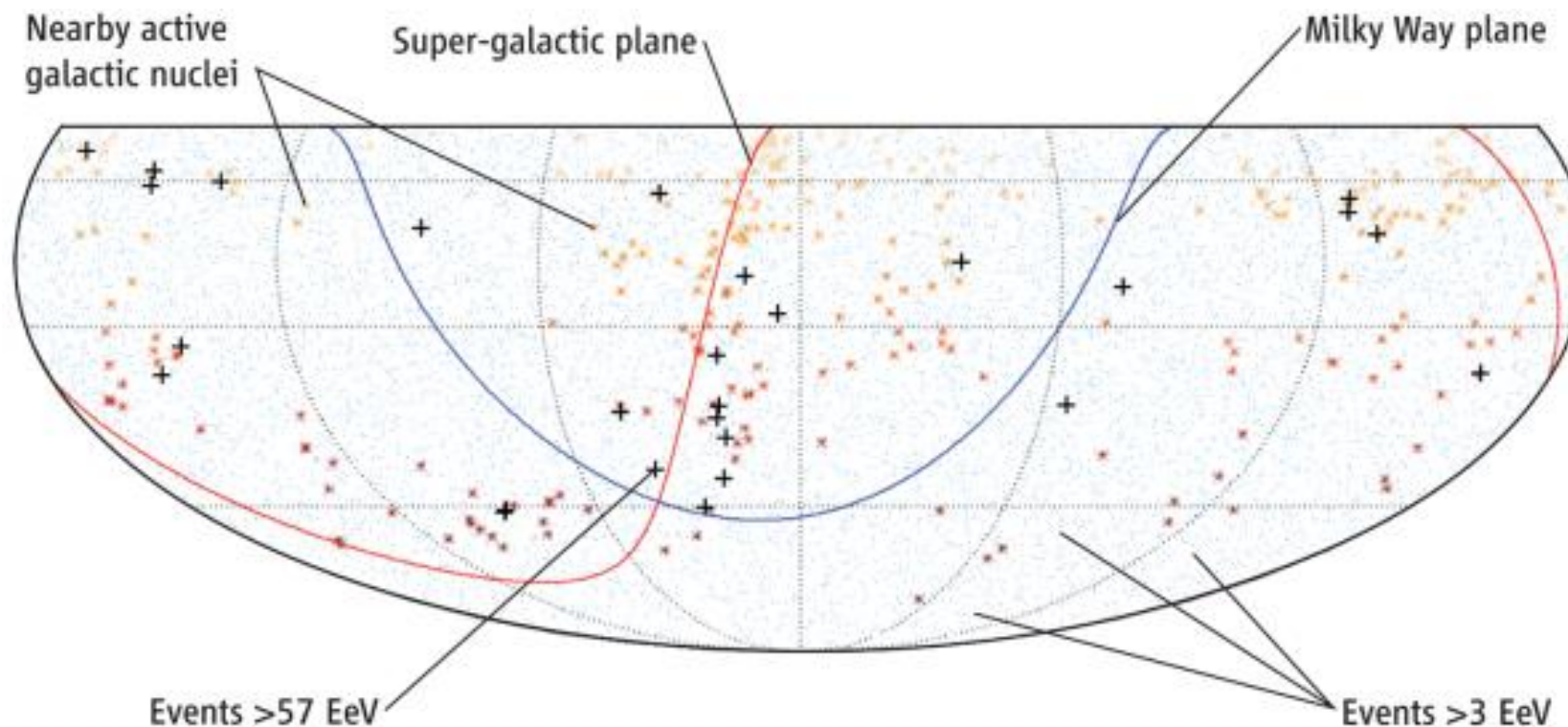


Рис. 3: Sky map showing cosmic rays detected by the Pierre Auger Observatory. Low-energy cosmic rays appear to originate from evenly distributed sources (blue dots), but the origins of the highest-energy events (crosses) correlate with the distribution of local matter as represented by nearby active galactic nuclei (red stars). Thus, active galactic nuclei are a likely source of these rare high-energy cosmic rays.  $1 \text{ EeV} = 10^{18} \text{ eV}$

- [1] A. A. Grib and Yu. V. Pavlov, *Mod. Phys. Lett. A* **23**, 1151 (2008); arXiv:0712.2667v1.  
Do active galactic nuclei convert dark matter into visible particles?
- [2] А.А.Гриб, Ю.В.Павлов. Труды ИПА РАН. Вып.**18**. СПб.: Наука, 2008. С.161–181.  
Рождение сверхтяжёлых частиц гравитацией ранней Вселенной и гипотеза сверхтяжёлой тёмной материи.
- [3] A. A. Grib and Yu. V. Pavlov. *Grav. Cosmol.* **15**, 44 (2009); arXiv:0810.1724v1.  
Active galactic nuclei and transformation of dark matter into visible matter.
- [4] A.A.Grib and Yu.V.Pavlov. *Int. J. Mod. Phys. A* **24**, N8&9, (2009) 1610–1619.  
Superheavy particles as dark matter and their role in creation of visible matter in active galactic nuclei and the early Universe.

Наша гипотеза [1] заключается в том, что эти КЛСВЭ возникают в АЯГ благодаря превращению частиц темной материи в кварки и лептоны с высокой энергией, происходящему вблизи горизонта сверхмассивных черных дыр, находящихся в центрах АЯГ.

Если все 100 % сверхтяжелых частиц темной материи с  $M = 10^{14} \text{ ГэВ} \approx 2 \cdot 10^{-10} \text{ г}$ , падающих на черную дыру, превращаются в КЛСВЭ, то общая масса поглощаемой темной материи должна быть порядка  $M \cdot j \sim 10^{28} \text{ г}$  в год. Даже если только  $\eta = 10^{-4}$  от общего количества сверхтяжелых частиц, вблизи горизонта черной дыры превращается в обычные частицы, наблюдаемые как КЛСВЭ, то масса всей поглощаемой сверхмассивной черной дырой темной материи  $\Delta m_a = Mj/\eta$ , которая будет необходима для обеспечения того же потока КЛСВЭ, все еще не будет превышать массу обычной материи, поглощаемой черной дырой и обеспечивающей наблюдаемую светимость АЯГ.

Оценим плотность темной материи, необходимую для образования в таком механизме наблюдаемого потока КЛСВЭ. Предположим, что темная материя распределена однородно с плотностью, типичной для обычной материи в центральных частях галактик  $\rho = 10^{-20} \text{ г/см}^3$ . Будем считать, что типичная скорость частиц темной материи на больших расстояниях от центральной черной дыры порядка  $v_\infty \approx 10^8 \text{ см/с}$  (т.е. порядка скорости звезд в центральных частях галактик). Сечение поглощения нерелятивистских частиц



шварцшильдовской черной дырой

$$\sigma_c = 4\pi \left( \frac{c}{v_\infty} \right)^2 r_g^2. \quad (1)$$

Здесь  $r_g$  — радиус горизонта черной дыры. Полагая для массы черной дыры  $M_{BH} = 10^8 M_\odot$  ( $M_\odot$  — масса Солнца), получим для скорости поглощения темной материи черной дырой  $\Delta m_a = \sigma_c v_\infty \rho \approx 3 \cdot 10^{28}$  г/год, которая соответствует приведенным выше нашим оценкам по наблюдениям группы Оже  $j \approx 10^{38}$  КЛСВЭ/год.

Это нетривиальное совпадение может быть одним из аргументов в пользу нашей гипотезы.

Отметим, что превращение темной материи в КЛСВЭ эффективно только для объектов с большим количеством диффузной темной матери вблизи черной дыры. Эта ситуация может иметь место в АЯГ и отсутствовать в обычных галактиках. Из (1) видно, что поглощение темной материи черными дырами пропорционально квадрату массы черной дыры, поэтому поток КЛСВЭ от черных дыр звездных масс пренебрежимо мал.

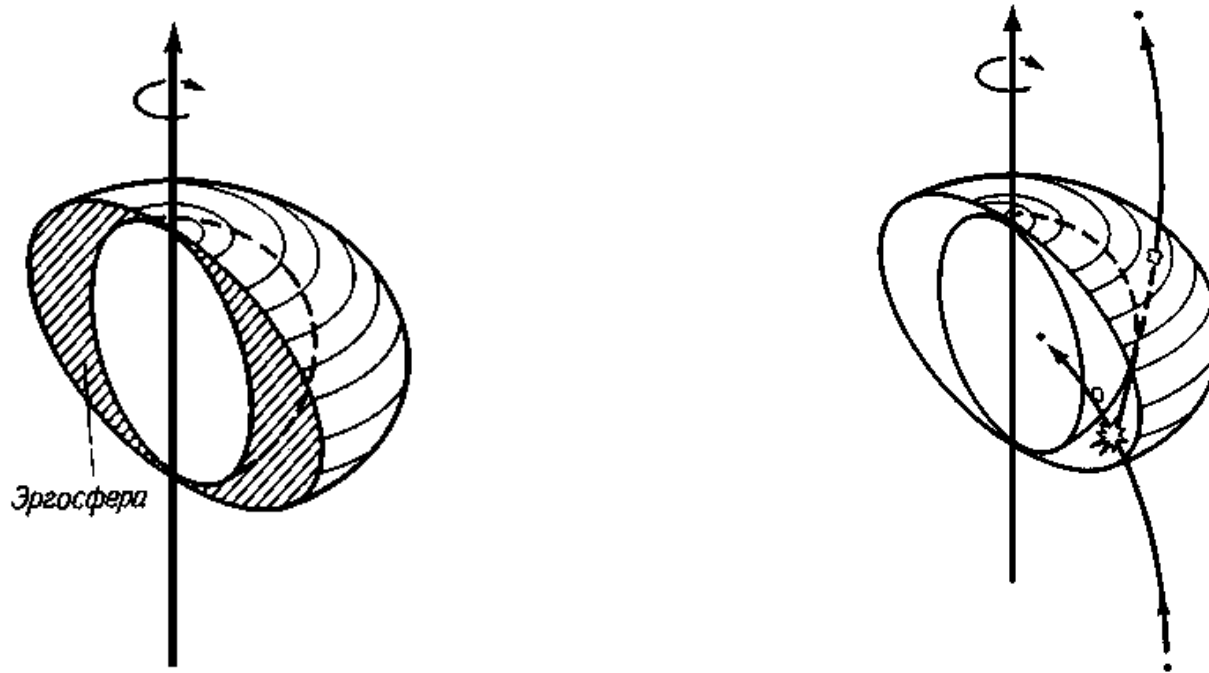
Если взять для распределения плотности темной материи результаты численного моделирования

$$\rho(r) = \frac{\rho_0}{(r/r_0)^\beta (1 + r/r_0)^{3-\beta}} \quad (2)$$

с  $\beta = 1$  для профиля Наварро-Френка-Уайта,  $\beta = 1.5$  для профиля Мура,  $r_0 = 45$  кпк,  $\rho_0 = 10^{-24}$  г/см<sup>3</sup>, тогда снова получим  $\Delta m_a \sim 2 \cdot 10^{28} - 10^{30}$  г/год.

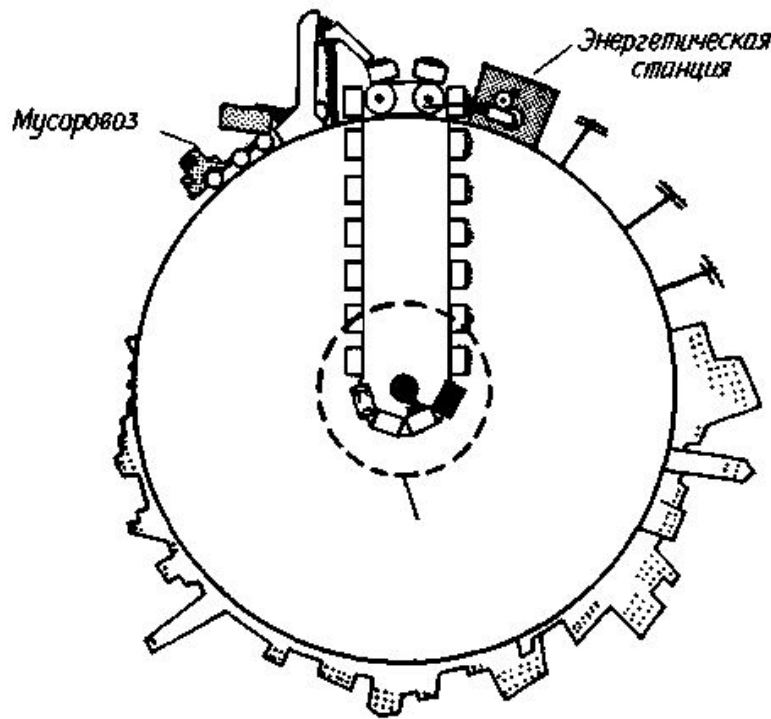
Таким образом, наши оценки приводят к приемлемым значениям аккреции сверхмассивных частиц темной материи на черные дыры.

## Эргосфера вращающейся чёрной дыры и процесс Пенроуза



**Наша гипотеза** — *A. A. Grib, Yu. V. Pavlov, Mod. Phys. Lett. A 23 (2008), 1151; Gravit. & Cosmology, 15 (2009), 44* — распад сверхтяжёлых частиц тёмной материи, стабильных в обычных условиях, может происходить за счет процесса Пенроуза в эргосфере сверхмассивных, быстровращающихся чёрных дыр в активных ядрах галактик.

## Ограничения на извлечение энергии из вращающейся чёрной дыры при процессе Пенроуза.



Из неравенства **Wald** следует:  
 Для извлечения энергии при распаде частицы в эргосфере на два осколка необходимо, чтобы скорость осколков была выше половины скорости света

$$v > \frac{c}{2}$$

Рис. Город, не загрязняющий окружающую среду. Когда мусор из контейнеров выбрасывается с ленты конвейера в эргосфере, лента конвейера испытывает ускорение. Если присоединить к ней электрогенератор, то можно использовать энергию, извлеченную из черной дыры. (По Мизнеру, Торну и Уилеру.)

## Энергия столкновения в поле вращающейся чёрной дыры

Метрика Керра вращающейся чёрной дыры в координатах Бойера-Лидквиста

$$ds^2 = dt^2 - (r^2 + a^2) \sin^2\theta d\varphi^2 - \frac{2Mr (dt - a \sin^2\theta d\varphi)^2}{r^2 + a^2 \cos^2\theta} - (r^2 + a^2 \cos^2\theta) \left( \frac{dr^2}{r^2 - 2Mr + a^2} + d\theta^2 \right), \quad (3)$$

$M$  — масса чёрной дыры,  $aM$  — угловой момент.

Горизонт событий для керровской чёрной дыры соответствует значению

$$r = r_H \equiv M + \sqrt{M^2 - a^2}. \quad (4)$$

Поверхность, называемая “пределом статичности”, определяется выражением

$$r = r_0 \equiv M + \sqrt{M^2 - a^2 \cos^2\theta}. \quad (5)$$

Область пространства-времени между горизонтом и пределом статичности называется эргосферой.

Для экваториальных ( $\theta = \pi/2$ ) геодезических в метрике Керра (3)

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\Delta} \left[ \left( r^2 + a^2 + \frac{2Ma^2}{r} \right) \varepsilon - \frac{2Ma}{r} L \right], \quad (6)$$

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{1}{\Delta} \left[ \frac{2Ma}{r} \varepsilon + \left( 1 - \frac{2M}{r} \right) L \right], \quad (7)$$

$$\left( \frac{dr}{d\tau} \right)^2 = \varepsilon^2 + \frac{2M}{r^3} (a\varepsilon - L)^2 + \frac{a^2\varepsilon^2 - L^2}{r^2} - \frac{\Delta}{r^2} \delta_1, \quad (8)$$

где

$$\Delta = r^2 - 2Mr + a^2, \quad (9)$$

$\delta_1 = 1$  для времениподобных геодезических ( $\delta_1 = 0$  для изотропных),  $\tau$  — собственное время движущейся частицы,  $\varepsilon = \text{const}$  — удельная энергия: частица с массой покоя  $m$  имеет в гравитационном поле (3) энергию  $\varepsilon m$ ;  $Lm = \text{const}$  — орбитальный момент частицы, по отношению к оси ортогональной плоскости движения.

Энергия  $E_{\text{с.м.}}$  в системе центра масс двух сталкивающихся частиц с массой покоя  $m$  в произвольном гравитационном поле может быть получена из

$$(E_{\text{с.м.}}, 0, 0, 0) = mu_{(1)}^i + mu_{(2)}^i, \quad (10)$$

где  $u^i = dx^i/ds$ . Возведя в квадрат (10) и учтя, что  $u^i u_i = 1$  найдём

$$E_{\text{с.м.}} = m\sqrt{2} \sqrt{1 + u_{(1)}^i u_{(2)}^i}. \quad (11)$$

Применим (11) для вычисления энергии в системе центра масс двух сталкивающихся частиц с удельными орбитальными моментами  $L_1, L_2$ , которые являются нерелятивистскими на бесконечности ( $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$ ) и свободно падают в метрике Керра. Обозначая  $x = r/M$ ,  $A = a/M$ ,  $l_n = L_n/M$ ,  $\Delta_x = x^2 - 2x + A^2$  и используя (3), (6)–(8) получим

$$\begin{aligned} \frac{E_{\text{с.м.}}^2}{2m^2} = \frac{1}{x\Delta_x} & \left\{ 2x^2(x-1) + l_1 l_2 (2-x) + 2A^2(x+1) - 2A(l_1 + l_2) - \right. \\ & \left. - \sqrt{2x^2 + 2(l_1 - A)^2 - l_1^2 x} \sqrt{2x^2 + 2(l_2 - A)^2 - l_2^2 x} \right\}, \quad (12) \end{aligned}$$

M. Banados, J. Silk and S. M. West, *Phys. Rev. Lett.* **103**, 111102 (2009).

В пределе  $r \rightarrow r_H$  для экстремальной чёрной дыры

$$a = M \Rightarrow E_{\text{с.м.}}(r \rightarrow r_H) = \sqrt{2} m \sqrt{\frac{l_2 - 2}{l_1 - 2} + \frac{l_1 - 2}{l_2 - 2}}, \quad (13)$$

Имеет место **неограниченное возрастание энергии столкновения**, когда удельный орбитальный момент одной из падающих частиц стремится к предельному значению  $2M$ , позволяющему достигнуть горизонта экстремальной чёрной дыры.

Из (8) следуют ограничения на возможные значения углового момента падающей частицы (с  $\varepsilon = 1$ ), при которых возможно достижение горизонта:

$$-2 \left(1 + \sqrt{1 + A}\right) = l_L \leq l \leq l_R = 2 \left(1 + \sqrt{1 - A}\right). \quad (14)$$

Правая часть формулы (8) обращается в ноль при значениях

$$x_R = 2 \left(1 + \sqrt{1 - A}\right) - A, \quad x_L = 2 \left(1 + \sqrt{1 + A}\right) + A \quad (15)$$

для  $l = l_R$  и  $l = l_L$  соответственно.

$$\frac{E_{\text{c.m.}}(r \rightarrow r_H)}{\sqrt{2}m} = \sqrt{2 + \frac{(l_1 - l_2)^2}{8 - 2A(l_1 + l_2) + (\sqrt{1 - A^2} - 1)(4 - l_1 l_2)}}. \quad (16)$$

Подставив предельные значения орбитального момента  $l_L, l_R$  в (16), получаем максимальные значения энергии столкновения

$$E_{\text{c.m.}}^{\text{max}}(r \rightarrow r_H) = \frac{2m}{\sqrt[4]{1 - A^2}} \sqrt{\frac{1 - A^2 + (1 + \sqrt{1 + A} + \sqrt{1 - A})^2}{1 + \sqrt{1 - A^2}}}. \quad (17)$$

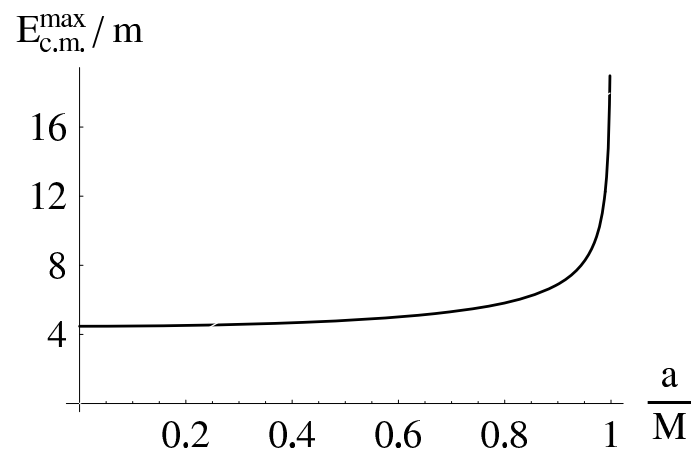


Рис. 4: Зависимость максимальной энергии столкновения частиц от углового момента чёрной дыры.



Для  $A = 1 - \epsilon$  с  $\epsilon \rightarrow 0$  из формулы (17) следует

$$A = 1 - \epsilon \Rightarrow E_{\text{c.m.}}^{\text{max}}(r \rightarrow r_H) \sim 2 \left( 2^{1/4} + 2^{-1/4} \right) \frac{m}{\epsilon^{1/4}} \approx \frac{m \cdot 4,06}{\epsilon^{1/4}}. \quad (18)$$

$$A_{\text{max}} = 0.998 \Rightarrow E_{\text{c.m.}}^{\text{max}}/m \approx 19.$$

$$A = 0 \Rightarrow E_{\text{c.m.}}^{\text{max}}/m = 2\sqrt{5}$$

A. N. Baushev, *Int. J. Mod. Phys. D* **18**, 1195 (2009).

- [1] K. S. Thorne, *Astrophys. J.* **191**, 507 (1974).  
[Disk-accretion onto a black hole. II. Evolution of the hole.](#)
- [2] E. Berti, V. Cardoso, L. Gualtieri, F. Pretorius and U. Sperhake,  
*Phys. Rev. Lett.* **103**, 239001 (2009). [Comment on](#)  
[“Kerr black holes as particle accelerators to arbitrarily high energy”](#).
- [3] T. Jacobson and T.P. Sotiriou, *Phys. Rev. Lett.* **104**, 021101 (2010).  
[Spinning black holes as particle accelerators.](#)

Другая форма предельной формулы [A.A.Grib, Yu.V.Pavlov, arXiv:1004.0913v1 \[gr-qc\]](#):

$$\frac{E_{\text{с.м.}}(r \rightarrow r_H)}{2m} = \sqrt{1 + \frac{(l_1 - l_2)^2}{2x_C(l_1 - l_H)(l_2 - l_H)}}, \quad (19)$$

где

$$l_H = \frac{2x_H}{A} = \frac{2(1 + \sqrt{1 - A^2})}{A}, \quad x_C = 1 - \sqrt{1 - A^2}. \quad (20)$$

Смысл  $l_H$  — максимально возможный удельный орбитальный момент вблизи горизонта

$$x \rightarrow x_H, \quad \frac{dt}{d\tau} > 0 \quad \Rightarrow \quad l < \varepsilon \frac{2x_H}{A} = \varepsilon l_H. \quad (21)$$

Для получения разрешённого интервала по  $r$  частицы с  $\varepsilon = 1$  и орбитальным моментом  $l$  приравниваем правую часть (8) к нулю и находим корни

$$x_{1,2} = \frac{l^2 \pm \sqrt{l^4 - 16(A - l)^2}}{4}. \quad (22)$$

Для  $l = l_H - \delta$ , во втором порядке по  $\delta$  вблизи горизонта:

$$l = l_H - \delta \Rightarrow x < x_\delta \approx x_H + \frac{\delta^2 x_C^2}{4x_H \sqrt{1 - A^2}}. \quad (23)$$

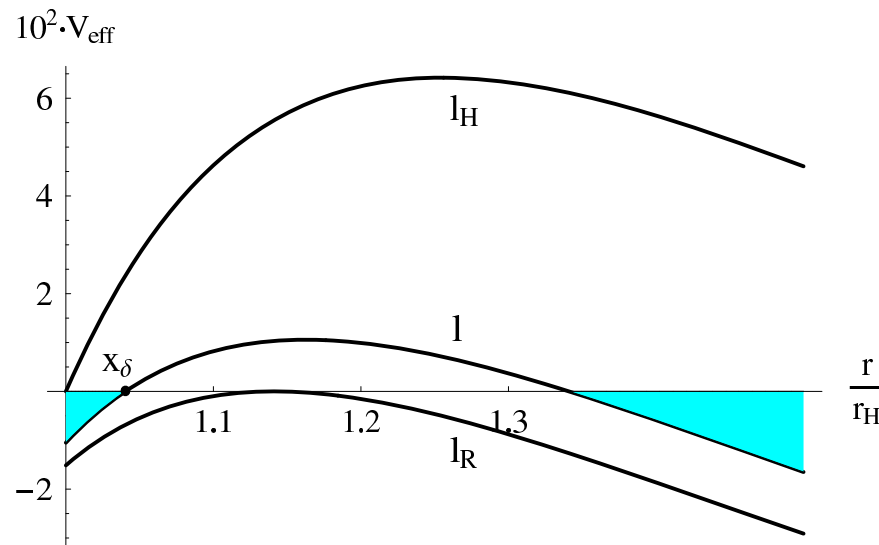


Рис. 5: Эффективный потенциал при  $A = 0.95$  для  $l_R \approx 2.45$ ,  $l = 2.5$ ,  $l_H \approx 2.76$ . Разрешённые зоны для  $l = 2.5$  показаны зелёным цветом.

$$\frac{1}{2} \left( \frac{dr}{d\tau} \right)^2 + V_{\text{eff}}(r, l) = 0, \quad V_{\text{eff}}(x, l) = -\frac{1}{x} + \frac{l^2}{2x^2} - \frac{(A - l)^2}{x^3}. \quad (24)$$

Если частица падает из бесконечности с  $l \leq l_R$ , достигает области, определённой в (23) и там взаимодействует с другими частицами аккреционного диска или распадается на более лёгкие частицы, так что получается большой удельный орбитальный момент  $l_1 = l_H - \delta$ , то, вследствие (16) **энергия столкновения в системе центра масс** будет

$$l_1 = l_H - \delta \quad \Rightarrow \quad E_{\text{с.м.}} \approx \frac{m}{\sqrt{\delta}} \sqrt{\frac{2(l_H - l_2)}{1 - \sqrt{1 - A^2}}} \quad (25)$$

и неограниченно возрастает при  $\delta \rightarrow 0$ .

$$A_{\text{max}} = 0.998, \quad l_2 = l_L \quad \Rightarrow \quad E_{\text{с.м.}} \approx \frac{3.85m}{\sqrt{\delta}}. \quad (26)$$

Заметим, что для быстровращающейся чёрной дыры с  $A = 1 - \epsilon$  различие между  $l_H$  и  $l_R$  невелико

$$l_H - l_R = 2 \frac{\sqrt{1 - A}}{A} \left( \sqrt{1 - A} + \sqrt{1 + A} - A \right) \approx 2(\sqrt{2} - 1)\sqrt{\epsilon}, \quad \epsilon \rightarrow 0. \quad (27)$$

$$A_{\text{max}} = 0.998, \quad \Rightarrow \quad l_H - l_R \approx 0.04. \quad (28)$$

Поэтому возможность получения столь малого добавочного орбитального момента во взаимодействии вблизи горизонта представляется достаточно вероятной.

A. A. Grib and Yu. V. Pavlov, *Mod. Phys. Lett. A* **23**, 1151 (2008);  
arXiv:0712.2667v1.

Do active galactic nuclei convert dark matter into visible particles?

**This black hole acts as a cosmic supercollider in which superheavy particles of dark matter are accelerated close to the horizon to the Grand Unification energies and can be scattering in collisions.**

## The time of movement before the collision with unbounded energy

From equation of the equatorial geodesic (6), (8) for a particle with dimensionless angular momentum  $l$  and specific energy  $\varepsilon = 1$  (i.e. the particle is non relativistic at infinity) falling on the black hole with dimensionless angular momentum  $A$  one obtains

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{(x - x_H)(x - x_C) \sqrt{2x^2 - l^2x + 2(A - l)^2}}{\sqrt{x} (x^3 + A^2x + 2A(A - l))}. \quad (29)$$

So the coordinate time (proper time of the observer at rest far from the black hole) of the particle falling from some point  $r_0 = x_0M$  to the point  $r_f = x_fM > r_H$  is equal to

$$\Delta t = M \int_{x_f}^{x_0} \frac{\sqrt{x} (x^3 + A^2x + 2A(A - l)) dx}{(x - x_H)(x - x_C) \sqrt{2x^2 - l^2x + 2(A - l)^2}}. \quad (30)$$

In case of the extremal black hole ( $A = 1, x_R = x_H = 1$ ) and the limiting value  $l = 2$

$$\Delta t = \frac{M}{\sqrt{2}} \left( \frac{2\sqrt{x} (x^2 + 8x - 15)}{3(x - 1)} + 5 \ln \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 1} \right) \Big|_{x_f}^{x_0} \quad (31)$$

and it diverges as  $(x_f - 1)^{-1}$  for  $x_f \rightarrow 1$ . So for all possible values of  $l$  and  $A$  **to get the collision with infinitely growing energy in the centre of mass system needs infinitely large time  $\Delta t$ .**

**For the interval of proper time** of the free falling to the black hole particle one obtains

$$\Delta\tau = M \int_{x_f}^{x_0} \frac{\sqrt{x^3} dx}{\sqrt{2x^2 - l^2x + 2(A - l)^2}}. \quad (32)$$

If the angular momentum of the particle falling inside the black hole is such that  $l_L < l < l_R$  then the proper time is finite for  $x_f \rightarrow x_H$ . For  $A = 1$ ,  $l = 2$  the integral (32)) is equal to

$$\Delta\tau = \frac{M}{3\sqrt{2}} \left( 2\sqrt{x}(3+x) + 3 \ln \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} \right) \Big|_{x_f}^{x_0} \quad (33)$$

and it diverges logarithmically when  $x_f \rightarrow 1$ . **So to get the collision with infinite energy one needs the infinite interval of as coordinate as proper time of the free falling particle.**

From (7), (8) for the angle of the particle falling in equatorial plane of the black hole one obtains

$$\Delta\varphi = \int_{x_f}^{x_0} \frac{\sqrt{x}(xl + 2(A - l)) dx}{(x - x_H)(x - x_C)\sqrt{2x^2 - l^2x + 2(A - l)^2}}. \quad (34)$$

If  $A \neq 0$ , then (34) is divergent for  $x_f \rightarrow x_H$ . **So before collision with infinitely large energy the particle must commit infinitely large number of rotations around the black hole.**

## The Extraction of Energy after the Collision in Kerr's Metrics

Conservation laws in inelastic particle collisions for the energy and momentum lead to

$$m(u_{(1)}^i + u_{(2)}^i) = \mu(v_{(1)}^i + v_{(2)}^i). \quad (35)$$

From (35) for  $t$ - and  $\varphi$ -component due to (6) one obtains

$$m(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) = \mu(\varepsilon_{1\mu} + \varepsilon_{2\mu}), \quad m(L_1 + L_2) = \mu(L_{1\mu} + L_{2\mu}), \quad (36)$$

i.e. the sum of energies and angular momenta of colliding particles is conserved in the field of Kerr's black hole. The initial particles in our case were supposed to be nonrelativistic on the infinity:  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$ , so Eq. (35) for  $r$ -component becomes

$$\begin{aligned} & -m \left[ \sqrt{\frac{2M}{r^3} (a - L_1)^2 + \frac{2M}{r} - \frac{L_1^2}{r^2}} + \sqrt{\frac{2M}{r^3} (a - L_2)^2 + \frac{2M}{r} - \frac{L_2^2}{r^2}} \right] = \\ & = \mu \left[ \sqrt{\varepsilon_{1\mu}^2 + \frac{2M}{r^3} (a\varepsilon_{1\mu} - L_{1\mu})^2 + \frac{a^2\varepsilon_{1\mu}^2 - L_{1\mu}^2}{r^2} - \frac{\Delta}{r^2}} - \sqrt{\varepsilon_{2\mu}^2 + \frac{2M}{r^3} (a\varepsilon_{2\mu} - L_{2\mu})^2 + \frac{a^2\varepsilon_{2\mu}^2 - L_{2\mu}^2}{r^2} - \frac{\Delta}{r^2}} \right]. \end{aligned} \quad (37)$$



For the case when the collision takes place on the horizon of the black hole ( $r \rightarrow r_H$ ) the system (36), (37) can be solved exactly

$$\varepsilon_{1\mu} = \frac{AL_{1\mu}}{2r_H}, \quad \varepsilon_{2\mu} = \frac{2m}{\mu} - \frac{AL_{1\mu}}{2r_H}, \quad L_{2\mu} = \frac{m}{\mu}(L_1 + L_2) - L_{1\mu}. \quad (38)$$

In general case the system of three Eqs. (36)–(37) for four variables  $\varepsilon_{1\mu}$ ,  $\varepsilon_{2\mu}$ ,  $L_{1\mu}$ ,  $L_{2\mu}$  can be solved numerically for fixed value of one variable (and fixed parameters  $m/\mu$ ,  $L_1/M$ ,  $L_2/M$ ,  $a/M$ ,  $r/M$ ). The example of numerical solution is

$$\begin{aligned} \mu/m = 0.3, \quad l_1 = 2.2, \quad l_2 = 2.198, \quad A = 0.99, \quad x = 1.21, \\ l_{1\mu} = 16.35, \quad l_{2\mu} = -1.69, \quad \varepsilon_{1\mu} = 7.215, \quad \varepsilon_{2\mu} = -0.548. \end{aligned}$$

Note that the energy of the second final particle is negative and [the energy of the first final particle is larger than the energy of initial particles](#) as it must be in the case of a Penrose process.

The limit  $2m$  for the extracted energy for any (including Penrose process) scattering process in the vicinity of the black hole was obtained in [T. Jacobson and T. P. Sotiriou, Phys. Rev. Lett. \*\*104\*\*, 021101 \(2010\).](#)

**Let us show why this conclusion is incorrect.**

The main assumption made by T.Jacobson and T.P.Sotiriou is the supposition of the collinearity of vectors of 4-momenta of the particles falling inside and outside of the black hole. They say that these vectors are “asymptotically tangent to the horizon generator”.

In the limiting case ( $A = 1$ ,  $l_1 = 2$ ) the expressions  $dt/d\tau$ ,  $d\varphi/d\tau$  of the components of the 4-velocity of the infalling particle (6), (7) **go to infinity** when  $r \rightarrow r_H$ , but  $dr/d\tau$  goes to zero.

$$g_{rr}u_{(1)}^r u_{(1)}^r \rightarrow -2, \quad r \rightarrow r_H. \quad (39)$$

For the particle outgoing from the black hole due to exact solution on the horizon (38) one puts  $\varepsilon_{1\mu} = l_{1\mu}/2 + \alpha$ , where  $\alpha$  is some function of  $r$  and  $l_{1\mu}$ , such that  $\alpha \rightarrow 0$  when  $r \rightarrow r_H$ . Putting this  $\varepsilon_{1\mu}$  into (6)–(8) one gets for  $x = r/M \rightarrow 1$

$$\frac{v_{(1)}^t}{u_{(1)}^t} = \frac{v_{(1)}^\varphi}{u_{(1)}^\varphi} = \frac{\alpha}{x-1} + \frac{l_{1\mu}}{2}, \quad \frac{v_{(1)}^r}{u_{(1)}^r} = -\sqrt{\frac{2\alpha^2}{(x-1)^2} + \frac{2l_{1\mu}\alpha}{x-1} + \frac{3}{8}l_{1\mu}^2 - \frac{1}{2}}. \quad (40)$$

Due to the condition  $dt/d\tau > 0$  (movement forward in time) **the necessary condition for collinearity is that both (40) must be zero, which is not true.**

$$u_{(1)} = \left( u_{(1)}^t, u_{(1)}^r, u_{(1)}^\varphi, 0 \right), \quad v_{(1)} = \left( v_{(1)}^t, v_{(1)}^r, v_{(1)}^\varphi, 0 \right). \quad (41)$$

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

## Возможно ли увидеть бесконечное будущее Вселенной при падении в чёрную дыру?

А.А. Гриб, Ю.В. Павлов

*Обсуждается возможность наблюдения космонавтом, падающим в чёрную дыру, бесконечного будущего внешней по отношению к чёрной дыре Вселенной. Показано, что такое наблюдение невозможно.*

PACS numbers: 04.70. -s, 04.70.Bw, 97.60.Lf

DOI: 10.3367/UFNr.0179.200903d.0279

### Содержание

1. Введение (279).
  2. Свободное падение на шварцшильдовскую чёрную дыру (280).
  3. Падение под горизонт (281).
- Список литературы (283).

### 1. Введение

Чёрные дыры в современной астрофизике считаются уже вполне привычными объектами. Имеются вполне убедительные наблюдения, говорящие в пользу их существования (см., например, обзор [1]). Согласно общему

Чёрные дыры могут быть статическими, описываемыми метрикой, открытой Шварцшильдом [3] в 1916 г., вращающимися, описываемыми метрикой Керра [4] и, наконец, обладающими кроме ненулевого момента количества движения ненулевым электрическим зарядом (метрика Рейснера – Нордстрёма [5] для невращающейся заряженной чёрной дыры и метрика Керра – Ньюмена [6] для вращающейся заряженной чёрной дыры). Впрочем, общим мнением является возможность пренебрежения зарядом чёрной дыры, если она образовалась в результате коллапса звезды из обычных нуклонов и электронов [7].

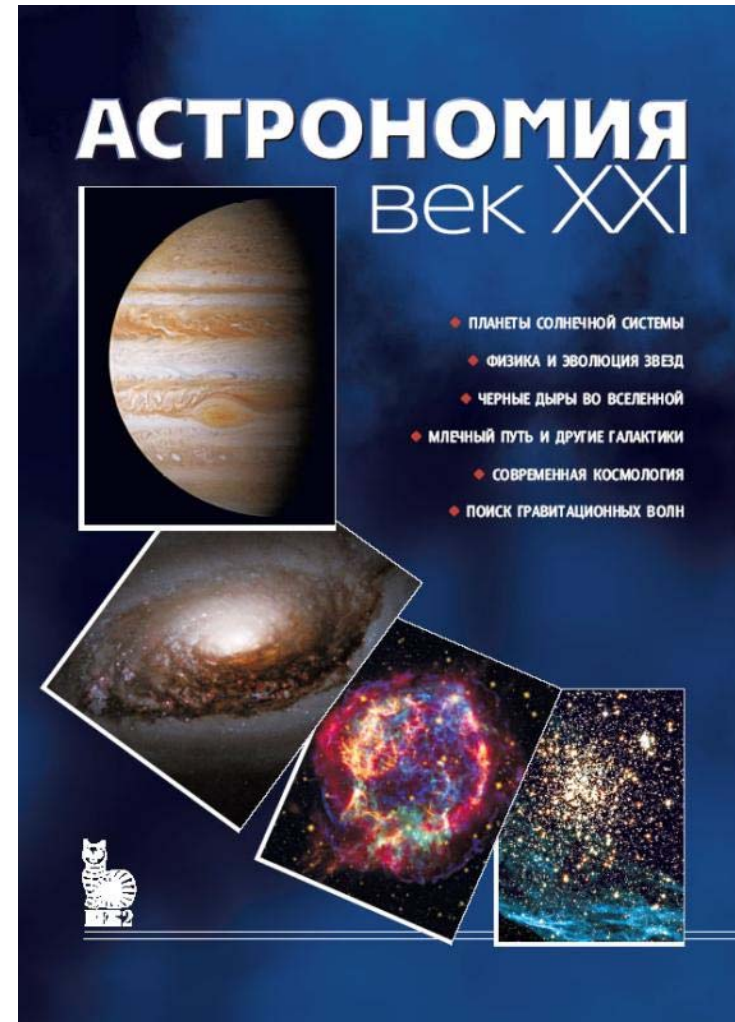
Обратимся к наиболее изученному случаю статичес-

## Утверждения об особенностях падения в черную дыру.

1) Черепащук А М, *Черные дыры во Вселенной* (Фрязино: Век 2, 2005)

“Если мы пошлем к черной дыре космический корабль с космонавтами на борту, то по мере его приближения к черной дыре мы, находясь на Земле, увидим, что корабль будет замедлять свое движение и никогда не проникнет внутрь. Если теперь обратить ситуацию и посмотреть, что увидит космонавт из окна космического корабля, зависшего вблизи черной дыры, то оказывается, что события во внешней Вселенной пробегают в чрезвычайно ускоренном темпе: практически в один миг своего времени космонавт увидит все бесконечно продолжительное развитие внешней вселенной. Космонавт увидит, как распухает наше Солнце, становясь красным гигантом, как Земля испаряется в горячих солнечных лучах, поскольку она скользит по верхним слоям атмосферы умирающего Солнца, как от Солнца отделяется внешняя водородная оболочка и оно превращается в белый карлик — словом, космонавт увидит будущее нашей Вселенной!”

2) Черепащук А М, в кн. *Астрономия: Век XXI* (Ред.-сост. Сурдин В Г) (Фрязино: Век 2, 2007) с. 219





- 3) Хокинг С *Мир в ореховой скорлупке*, пер. с англ. А.Г. Сергеева (СПб: Амфора, 2008)

Примечание переводчика на с. 124.

... за время падения он (падающий астронавт — А.Г, Ю.П.) успеваеет увидеть в ускоренном режиме все будущее Вселенной, даже если оно бесконечно.

- 4) Редже Т *Этюды о Вселенной* (М.: Мир, 1985) с. 34  
[Regge T *Cronache Dell'Universo* (Boringhieri, Torino, 1981)]

“Такому наблюдателю (находящемуся на поверхности коллапсирующей звезды — А.Г, Ю.П.) покажется, что во внешнем пространстве время летит ускоренно и мигом доходит до самого «конца всех времен»”.

- 5) Рис М *Наша космическая обитель* (Москва-Ижевск: Инст. компьют. исслед., 2002)  
[Rees M *Our cosmic habitat* (Princeton: Princeton Univ. Press, 2000)]

Благоразумный астронавт, сумевший попасть на самую близкую орбиту закручивающейся дыры, не упав при этом в нее, получил бы богатые впечатления: ... за субъективно короткий отрезок времени перед ним развернулся бы чрезвычайно долгий интервал будущего внешней вселенной.

Август 2009 г.

Том 179, № 8

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

ПИСЬМА В РЕДАКЦИЮ

**Экзотика чёрных дыр: космонавт вблизи горизонта**

(о методической заметке А.А. Гриба и Ю.В. Павлова  
"Возможно ли увидеть бесконечное будущее Вселенной  
при падении на чёрную дыру?")

А.М. Черепашук

Поэтому важно правильно понимать структуру чёрных дыр (подобно тому, как мы понимаем структуру звёзд) и адекватно отражать её в соответствующей научно-популярной литературе. Этому способствует статья А.А. Гриба и Ю.В. Павлова. Она дополняет книги и статьи И.Д. Новикова и В.П. Фролова (см., например, [2, 3]), написанные на эту тему.

В целом, я считаю статью А.А. Гриба и Ю.В. Павлова полезной в методическом плане и проясняющей ряд особенностей таких экстремальных объектов, как чёрные дыры.



## 1. Свободное падение на шварцшильддовскую черную дыру

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{r_g}{r}} - r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2). \quad (42)$$

Здесь  $r_g = 2Gm/c^2$  — гравитационный радиус черной дыры,  $c$  — скорость света.

Радиальные геодезические удовлетворяют уравнениям

$$\left(\frac{dr}{c d\tau}\right)^2 = \frac{r_g}{r} + \varepsilon^2 - 1, \quad \frac{dt}{d\tau} = \frac{\varepsilon}{1 - r_g/r}, \quad (43)$$

где  $\varepsilon = \text{const}$ . Если падение начинается из состояния покоя на некотором расстоянии  $r_0 > r_g$ , то  $\varepsilon = \sqrt{1 - \frac{r_g}{r_0}}$  и

$$\frac{dr}{c dt} = - \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \left[1 - \frac{1 - r_g/r}{1 - r_g/r_0}\right]^{1/2}. \quad (44)$$

Интегрирование (44) дает следующее выражение для времени  $t - t_0$  свободного падения из состояния покоя в точке  $r_0$  в момент  $t_0$  до точки с коор-

динатой  $r < r_0$ :

$$t - t_0 = \frac{r_g}{c} \left\{ \sqrt{x_0 - 1} \left[ (2 + x_0) \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{x_0 - x}{x}} + \sqrt{x(x_0 - x)} \right] + 2 \ln \left( \sqrt{(x_0 - 1) \frac{x}{x_0}} + \sqrt{1 - \frac{x}{x_0}} \right) - \ln |x - 1| \right\}, \quad (45)$$

где  $x_0 = r_0/r_g$ ,  $x = r/r_g$ .

Для собственного времени падения  $\tau - \tau_0$  из состояния покоя в  $r_0$  в точку с радиальной координатой  $r$  получим

$$\tau - \tau_0 = \frac{r_0}{c} \sqrt{\frac{r_0}{r_g}} \left( \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{r_0}{r} - 1} + \sqrt{\frac{r}{r_0} - \frac{r^2}{r_0^2}} \right). \quad (46)$$

Отметим, что данное выражение точно совпадает с выражением для времени падения из  $r_0$  в  $r$  в теории тяготения Ньютона!

Рассмотрим радиальное движение светового луча. Из условия  $ds = 0$  получим

$$\frac{dr}{c dt} = \pm \left(1 - \frac{r_g}{r}\right). \quad (47)$$

Время распространения  $t - t_s$  фотона по радиусу ( $t_s$  — время старта фотона) из  $r_0$  в  $r$

$$t - t_s = \frac{r_0 - r}{c} + \frac{r_g}{c} \ln \left| \frac{r_0 - r_g}{r - r_g} \right|. \quad (48)$$

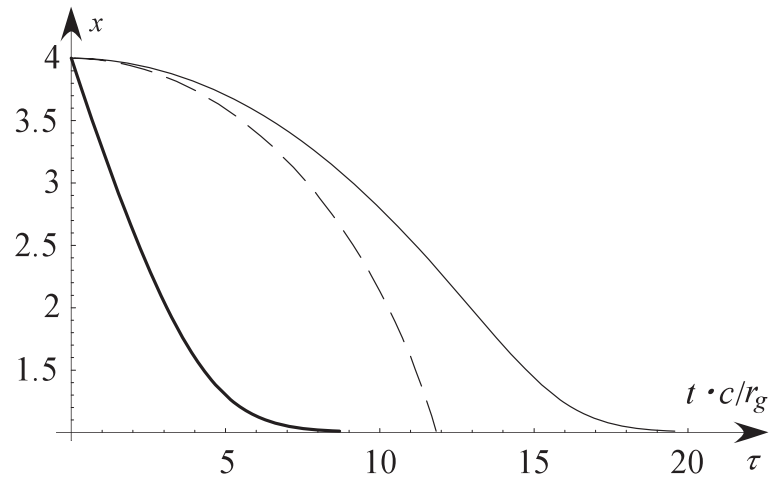


Рис. 6: Зависимость  $x(t)$  и  $x(\tau)$  при падении на черную дыру массивной частицы и фотона (жирная кривая).

Вычитая (48) из (45), получим решение следующей задачи: в какой момент времени  $t_s$  должен быть испущен световой сигнал в точке  $r_0$  в радиальном направлении, чтобы при значении шварцшильдской координаты  $r < r_0$  он догнал свободно падающего по радиусу “наблюдателя”, начавшего движение с нулевой начальной скоростью из точки  $r_0$  в некоторый момент времени  $t_0 < t_s$ ?

$$t_s - t_0 = \frac{r_g}{c} \left[ (2 + x_0) \sqrt{x_0 - 1} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{x_0 - x}{x}} + \right. \quad (49)$$

$$\left. + \sqrt{x_0 - x} \left( \sqrt{(x_0 - 1)x} - \sqrt{x_0 - x} \right) + 2 \ln \left( \sqrt{\frac{x}{x_0}} + \sqrt{\frac{x_0 - x}{(x_0 - 1)x_0}} \right) \right],$$

$x = r/r_g$ ,  $x_0 = r_0/r_g$ . Переходя в (49) к пределу  $x \rightarrow 1$ , т.е.  $r \rightarrow r_g$ , найдем, насколько позже может быть испущен свет из точки начала падения массивного наблюдателя, чтобы он еще был обнаружим до пересечения падающим наблюдателем горизонта:

$$t_s - t_0 = \frac{r_g}{c} \left[ (2 + x_0) \sqrt{x_0 - 1} \operatorname{arctg} \sqrt{x_0 - 1} + 2 \ln 2 - \ln x_0 \right]. \quad (50)$$

Таким образом, предел конечен и **возможности увидеть при падении в черную дыру до пересечения шварцшильдовского радиуса событий неограниченно далекого будущего, которые происходят в окрестности точки начала падения, нет.**

В ньютоновской теории соответствующее выражение для  $t_s - t_0$  равно

$$t_s - t_0 = \frac{r_g}{c} \left[ x_0^{3/2} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{x_0 - x}{x}} + \sqrt{x_0 x (x_0 - x)} - (x_0 - x) \right]. \quad (51)$$

При больших значениях  $x_0/x = r_0/r \gg 1$  обе формулы (49) и (51) дают одинаковый результат

$$t_s - t_0 \sim \frac{\pi}{2} \frac{r_0}{c} \sqrt{\frac{r_0}{r_g}}. \quad (52)$$

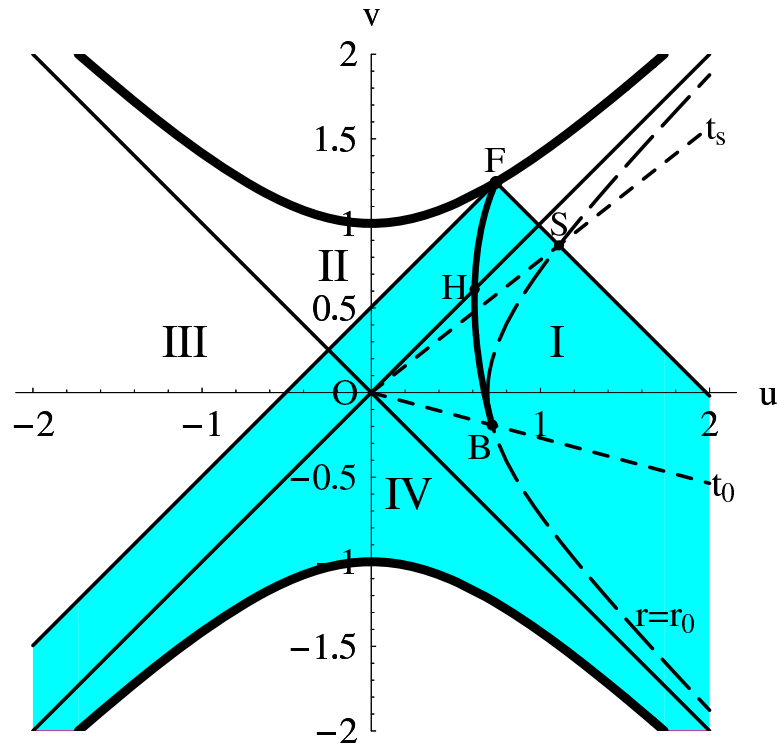


Рис. 7: Свободное падение на чёрную дыру в координатах Крускала-Шекереса.

Для вращающейся чёрной дыры кроме горизонта событий появляется ещё и, так называемый, горизонт Коши (внутри горизонта событий). Формально, при его пересечении, можно было бы увидеть бесконечное будущее. Однако необходимо учитывать обратное влияние на метрику падающего в чёрную дыру излучения (неустойчивость внутреннего решения Керра). Эти вопросы активно обсуждаются, но в настоящее время не имеют окончательного решения.