Вычислительная сложность задачи Коши для задачи трёх тел

Н. Н. Васильев[1] Д. А. Павлов[2]

[1]ПОМИ РАН

[2]ИПА РАН

Научный семинар ИПА РАН, 10 ноября 2016

Суть работы

- Постановка задачи Коши для непрерывной динамической системы в терминах, адекватных вычислительным алгоритмам.
- Анализ вычислительной сложности задачи Коши для частного случая задачи трёх тел.

Вещественные числа — вымысел

Краткая история чисел

- Натуральные числа ($\mathbb{N}$): сложение, умножение, сравнение
- Целые числа ($\mathbb{Z}$): вычитание
- Рациональные числа ($\mathbb{Q}$): деление
- $\sqrt{2}$, π
- Вещественные числа ($\mathbb{R}$): *возрастающая ограниченная последовательность имеет предел.*

Счётность

- Множество конечных бинарных строк счётно
- Множество бесконечных бинарных строк несчётно (диагональ Кантора)
- Множество алгоритмов счётно (машина Тьюринга)
- $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ – счётные множества; $\mathbb{R}$ несчётно

В $\mathbb{R}$ существуют числа, для которых нет алгоритма.

Вычислимые вещественные числа $\mathbb{T}$

Вычислимое число a = алгоритм, который

Определение 1: для $\forall \varepsilon \in \mathbb{Q}, \varepsilon > 0$ выдаёт $r \in \mathbb{Q} : |r - a| < \varepsilon$
Определение 2: для $\forall i \in \mathbb{N}$ выдаёт $q_i \in \mathbb{Q} : |q_i - q_{i+1}| < 2^{-i}$

Свойства $\mathbb{T}$

- Замкнуто по арифметическим операциям
- Отношения порядка и равенства определены, но неразрешимы

π, e, $\ln 2$, все алгебраические числа вычислимы.

Почти все числа из $\mathbb{R}$ невычислимы.

Можно *определить* невычислимое вещественное число.
(Но почти все числа из $\mathbb{R}$ неопределимы.)

Вычислимые вещественные функции одной переменной

Определение

Последовательность $\{r_i\}_{i=0}^{\infty}, r_i \in \mathbb{R}$ вычислима, если существует рекурсивная функция $F : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{Z}$:

$$\forall m > 0, \forall n \quad \frac{F(m,n)-1}{n} < r_m < \frac{F(m,n)+1}{n}$$

Определение

Вещественная функция f вычислима, если:

- f последовательно вычислима: для любой вычислимой $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$, $\{f(x_i)\}_{i=1}^{\infty}$ также вычислима.
- f вычислимо равномерно непрерывна: существует вычислимая $g : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ такая, что если $p < a, b < q$ и $|a-b| < \frac{1}{g(p,q,k)}$, то $|f(a) - f(b)| < \frac{1}{k+1}$.

Свойства вычислимых вещественных функций

- x, e^x, $\sin x$ вычислимы
- Сумма, произведение, частное и композиция вычислимых функций вычислима
- Есть обобщение определений на частично определённые функции
- $1/x$, $\ln x$, $\tan x$, $\arcsin x$, $\arctan x$ вычислимы
- Есть обобщение определений на функции многих переменных
- Все вычислимые вещественные функции непрерывны

Классы сложности задач

Полиномиальные задачи (P)

- $O(N)$: поиск символа в строке, сложение чисел
- $O(N \log N)$: сортировка сравнениями

Предположительно экспоненциальные задачи (NP-hard)

Изоморфизм подграфу, задача о рюкзаке, задача коммивояжёра

Экспоненциальные задачи (EXP)

Шашки

Неразрешимые задачи

- Проблема останова
- Отношение равенства выражений с x, $|x|$, e^x, $\sin x$, $\ln 2$, π

Задача $=$ функция от $\mathbb{N}$ $=$ бесконечная бинарная строка.
Почти все задачи неразрешимы.

Задача Коши

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0 \end{aligned} \tag{1}$$

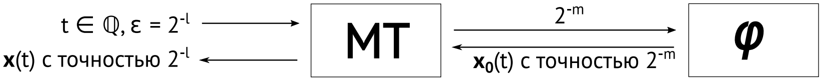
$\mathbf{x}, \mathbf{x}_0 \in D \subseteq \mathbb{R}^n$, D – фазовое пространство системы (открытое).
$\mathbf{f} : D \to \mathbb{R}^n$ – вычислимая вещественная вектор-функция.

Определение

Функция решения задачи Коши — $S(\mathbf{x}_0, t) : D \times \mathbb{Q} \to D$
Замыкание функции $S|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0} : \mathbb{Q} \to D$ на $\mathbb{R}$ — решение (1).

Определение

Машина Тьюринга, вычисляющая эту функцию: принимает $t, \varepsilon \in \mathbb{Q}$ и оракула φ, который реализует вычисление $\mathbf{x}_0$.
Выдаёт значение $\mathbf{x}(t)$ с точностью ε.



Разрешимость задачи Коши

Определение

Задача Коши разрешима, если $\mathbf{x}^*(t) : \mathbb{R} \to D$
(i) существует на всём $\mathbb{R}$; (ii) единственно; (iii) является вычислимой функцией.

Задача определения сингулярности решения неразрешима.

Теорема Коши-Липшица

Если $D = \mathbb{R}^n$ и $\mathbf{f}$ глобально непрерывна по Липшицу по $\mathbf{x}$, то решение на $\mathbb{R}$ существует и единственно для всех $\mathbf{x}_0$.

Теорема (Collins, Graça, 2007)

Если $\mathbf{f}$ непрерывна и решение единственно, то оно вычислимо переборным алгоритмом.

Теорема (Мацулевич, Нетанмяки, Репин, 2013)

Если $\mathbf{f}$ глобально непрерывна по Липшицу по $\mathbf{x}$ и t, то решение вычислимо модифицированным методом Пикара-Линдлёфа.

Сложность задачи Коши

Определение

Задача Коши имеет полиномиальную сложность, если существует машина Тьюринга, вычисляющая функцию её решения за время $< \mathcal{P}(\mathrm{LENGTH}(t), \mathrm{LENGTH}(\varepsilon))$.

$\mathrm{LENGTH}(t) > \log_2(t)$, $\mathrm{LENGTH}(\varepsilon) = -log_2(\varepsilon)$

Определение

Пусть есть задачи Коши A и B. A полиномиально сводима к B, если существуют вычислимые за полиномиальное время $G : D^{(A)} \to D^{(B)}$ и $H : D^{(B)} \to D^{(A)}$ такие, что для любого $\mathbf{x}_0^{(A)} \in D^{(A)}$ и $\mathbf{x}^{*(A)}(t)$ выполняется $\mathbf{x}^{*(A)}(t) = H(\mathbf{x}^{*(B)}(t))$, где $\mathbf{x}^{*(B)}(t)$ – решение B для $\mathbf{x}_0^{(B)} = G(\mathbf{x}_0^{(A)})$.

Если A полиномиально сводима к B и B имеет полиномиальную сложность, то A также имеет полиномиальную сложность.

Задача N тел

$$\left.\begin{array}{rcl}\dot{\mathbf{p}}_i & = & \mathbf{v}_i, \quad i = 1..N \\ \dot{\mathbf{v}}_i & = & \sum_{j=1,\ j\neq i}^{N} \mu_j \frac{\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_i}{|\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_i|^3}, \quad i = 1..N\end{array}\right\}$$

$\mu_i \in \mathbb{R}$, $\mu_i \geq 0$, $\mathbf{p}_i \in \mathbb{R}^3$, $\mathbf{v}_i \in \mathbb{R}^3$.
(на время забудем о сингулярностях)

Задача Коши при N=2

Есть алгебраическая функция решения с полиномиальной сложностью.

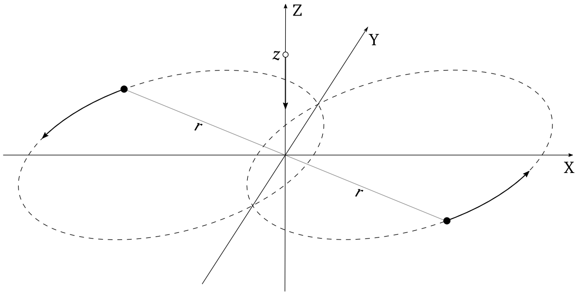
Задача Коши при N=3

Не имеет решения в АФ (Пуанкаре). Решения в виде рядов экспоненциально сложны (Зундман, Белорицкий, Мерман).

Алгоритмы численного интегрирования

- Время работы не меньше $O(t) = O(2^{\mathrm{LENGTH}(t)})$.
- Большая часть алгоритмов не *вычисляет* решение.

Задача Ситникова



Состояние системы: $\mathbf{x} = (z, v, E)$.

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}) = (v, \ddot{z}, \dot{E}) \\
\ddot{z} &= -\frac{2\mu z}{\sqrt{z^2 + a^2(1 - e\cos E)^2}^3} \\
\dot{E} &= \frac{\sqrt{\mu a}}{1 - e\cos E}
\end{aligned}$$

Константы: $a > 0$, $e \in (0..1)$, $\mu > 0$. Период $P = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{\mu}}$.

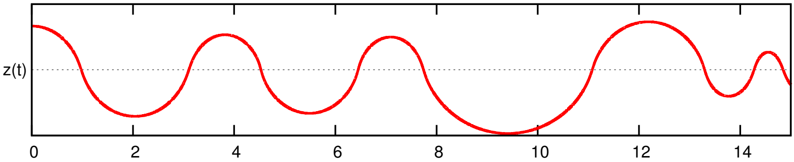
Свойства задачи Ситникова

Теорема

В задаче Ситникова нет сингулярностей, а функция **f** является липшицевой на всей области определения.

Следствие

Существование, единственность и вычислимость решения задачи Коши.



Теорема Алексеева

Для любого достаточно малого $e > 0$ найдётся $m(e)$: $\forall \{s_n\}_{n \in \mathbb{Z}}, s_n \geq m$ существует решение $z(t)$, нули которого $\{\tau_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ удовлетворяют равенству $\left\lfloor \frac{\tau_{k+1} - \tau_k}{P} \right\rfloor = s_k, \ \forall k \in \mathbb{Z}.$

Комбинаторный взрыв решений

Рассматриваем $z_0 = 0, t \geq 0, k \geq 0$ ($\tau_0 = 0$).

Лемма 1

Обозначим $C(T)$ множество (конечных) последовательностей вида $(s_1, \ldots, s_k), s_i \geq m > 1,\ s_i \mod 2 = 0,\ m \mod 2 = 0$, для каждой из которых *любая* последовательность $(\tau_0, \ldots, \tau_{k+1})$, удовлетворяющая соотношению, лежит на отрезке $[0, T]$ (т.е. $\tau_{k+1} \leq T$).

$|C(T)|$ асимптотически ограничено снизу показательной функцией от T:

$|C(T)| \geq (m/2+1)^{\frac{T}{(m+1)P}}$ для достаточно больших T.

Докажем возможность восстановления $(s_1, \ldots, s_k)$ при наличии решения задачи Коши.

Теорема Штурма о сравнении

Рассмотрим два уравнения:

$$\ddot{x} = -q(t)x \tag{2}$$

$$\ddot{x} = -Q(t)x \tag{3}$$

(q и Q непрерывны.)

Пусть ненулевое решение (2) $x(t)$ имеет корни a и b, при этом $Q(t) > q(t)$ при $t \in [a, b]$.

Тогда любое решение (3) имеет корень на (a, b).

Оценка амплитуды z из расстояния между корнями

Лемма 2

Если 0 и τ — корни $z(t)$, то значение z между ними достигает как минимум $h = H(\tau) = \sqrt{\left(\frac{2\mu\tau^2}{\pi}\right)^{\frac{2}{3}} - a^2}$

Доказательство леммы от противного

Пусть $z^*(t) < h$, $0 \le t \le \tau$. z^* является решением уравнения:

$$\ddot{z} = -\frac{2\mu z}{\sqrt{z^*(t)^2 + r(t)^2}^3} = -Q(t)z, \qquad (4)$$

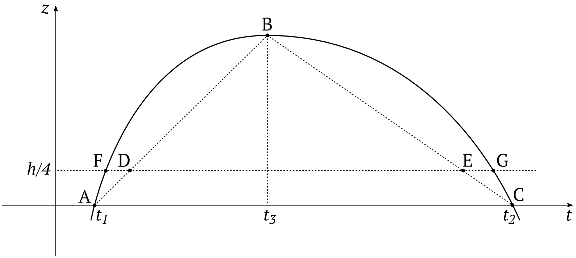
$z^*(t) < h,\ r(t) \le a \Rightarrow Q(t) > \frac{2\mu}{\sqrt{h^2+a^2}^3} = q > 0.$
Уравнение гармонических колебаний $\ddot{z} = -qz$. При $z(0) = 0,\ \dot{z}(0) = v_0$ решение $z^{**}(t) = v_0 \sin(\sqrt{q}t)$. По теореме Штурма, между 0 и $\pi/\sqrt{q}$ найдётся корень z^*, т.е. $\tau < \pi/\sqrt{q}$. Противоречие: по построению $\tau = \pi/\sqrt{q}$.

Оценка интервала, на котором z превышает порог

Лемма 3

Пусть $z(t)$ непрерывна и выпукла на $[t_1, t_2]$;
пусть $z(t_1) = z(t_2) = 0$; пусть $\exists t \in [t_1, t_2] : z(t) > h > 0$. Тогда
$\exists t_a, t_b \in [t_1, t_2] : (t_b - t_a) > \frac{3}{4}(t_2 - t_1), \forall t \in (t_a, t_b)\ z(t) > h/4$.

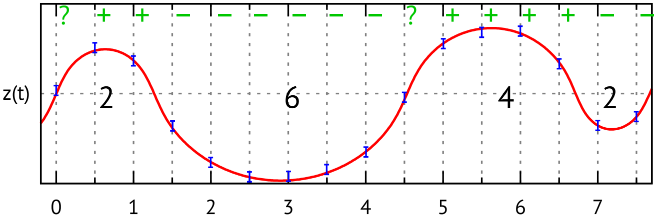
Доказательство



$|\mathrm{DE}| < |\mathrm{FG}|$. По подобию треугольников: $\frac{|\mathrm{DE}|}{|\mathrm{AC}|} = 1 - \frac{h/4}{z(t_3)}$.
$z(t_3) > h,\ |\mathrm{AC}| = (t_2 - t_1) \Rightarrow |\mathrm{FG}| > \frac{3}{4}(t_2 - t_1)$.

Восстановление комбинаторной последовательности

Построим сетку $\{t_i\}$ с шагом $\delta < mP/2$. Выберем $\varepsilon = 2^{-l} (l \in \mathbb{N}), \varepsilon < h/4$, где $h = H(mP)$.



- Если $|z(t_i)| > h/4$, то расстояние от t_i до ближайшего корня меньше $\delta/2$ (Лемма 3)
- Вычисленные $z(t_i)$ с точностью ε: «+», «-», «?»
- «?» узлы не встретятся более 1 раза подряд
- Между «+» и «-» z меняет знак ровно 1 раз (Лемма 2)

p узлов одного знака подряд соответствуют $s_k = \lceil (p+1)/2 \rceil$.

Вычислительная сложность задачи Коши

Все машины Тьюринга, вычисляющие $\{t_i\}$, использовали *одного и того же оракула* φ для $\mathbf{x}_0$.
Если задача имеет полиномиальную сложность, то машины успеют считать не более $\mathcal{P}(\mathrm{LENGTH}(t_i), \mathrm{LENGTH}(\varepsilon))$ символов с ленты φ, что не превышает $\mathcal{P}(\log_2 T, l)$.

Следовательно, машины могут выдать не более $2^{\mathcal{P}(\log_2 T, l)}$ различных результатов.

Но последовательностей не менее $(m/2+1)^{T/((m+1)P)}$, что не может быть ограничено $2^{\mathcal{P}(\log_2 T, l)}$.

Задача Коши для задачи Ситникова имеет сложность выше полиномиальной.

Поскольку она полиномиально сводится к задаче Коши для задачи трёх тел, то и её сложность выше полиномиальной.

Заключение

- Формально постановлена задача о вычислительной сложности задачи Коши.
- Точная нижняя оценка такой сложности не может быть полиномиальной в случае задачи трех тел.

Выбор осциллирующих траекторий задачи Ситникова в принципе не очень существенен (см. гомоклинические траектории).

Дальнейшая работа

- Для интегрируемых задач динамики можно получить эффективные верхние оценки для сложности решения задачи Коши, полиномиальные по $\log(t)$ и $\log(1/\varepsilon)$. Связь оценок алгоритмической сложности задачи Коши и интегрируемости пока не исследована.
- Рассмотрена сложность задачи Коши при $t \in \mathbb{Q}, t \to \infty$. Интересна зависимость сложности от ε при $t \in \mathbb{R}$.