Применение геометрического метода Курышева-Перова для определения орбит астероидов

В.Б.Кузнецов
Институт Прикладной Астрономии РАН

Задача:

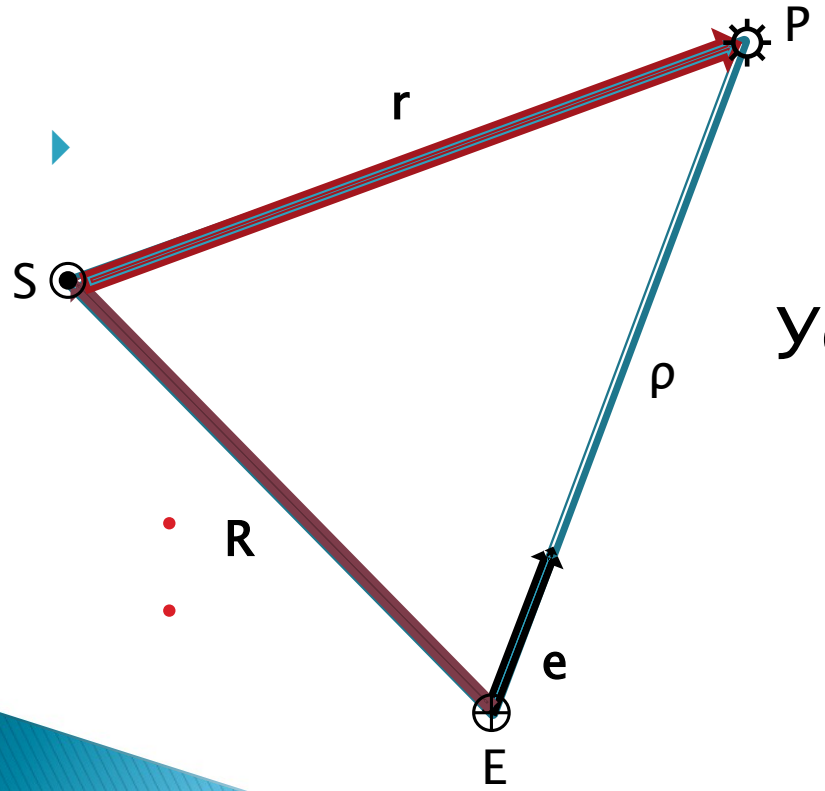
- Определение предварительной орбиты, лежащей вне плоскости эклиптики, геометрическим методом по пяти угловым наблюдениям.

История вопроса

- Коши (1847)
- Харцер (1910)
- Вильев (1938)
- Курышев и Перов (1982)
- Кузнецов (2012, 2013, 2014)

Геометрический метод

- Пять наблюдений, в моменты времени: $t_1, \ldots, t_5$.
-
-



$$\left.\begin{aligned} \mathbf{r}_1 &= \mathbf{e}_1\rho_1 - \mathbf{R}_1 \\ \mathbf{r}_2 &= \mathbf{e}_2\rho_2 - \mathbf{R}_2 \\ \mathbf{r}_3 &= \mathbf{e}_3\rho_3 - \mathbf{R}_3 \\ \mathbf{r}_4 &= \mathbf{e}_4\rho_4 - \mathbf{R}_4 \\ \mathbf{r}_5 &= \mathbf{e}_5\rho_5 - \mathbf{R}_5 \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Условия компланарности:

$$\mathbf{r}_1(\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3) = 0. \qquad (2)$$

$$\mathbf{r}_2(\mathbf{r}_3 \times \mathbf{r}_4) = 0. \qquad (3)$$

$$\mathbf{r}_3(\mathbf{r}_4 \times \mathbf{r}_5) = 0. \qquad (4)$$

Геометрический метод (продолжение)

$$\left.\begin{aligned}
\rho_2 &= -\frac{\mathbf{e_1}(\mathbf{e}_5\times\mathbf{R_2})\rho_1\rho_5+\mathbf{e_1}(\mathbf{R_2}\times\mathbf{R}_5)\rho_1-\mathbf{R_1}(\mathbf{e}_5\times\mathbf{R_2})\rho_5-\mathbf{R_1}(\mathbf{R_2}\times\mathbf{R}_5)}{\mathbf{e_1}(\mathbf{e_2}\times\mathbf{R}_5)\rho_1\rho_5-\mathbf{e_1}(\mathbf{e_2}\times\mathbf{R}_5)\rho_1-\mathbf{R_1}(\mathbf{e_2}\times\mathbf{e}_5)\rho_5+\mathbf{R_1}(\mathbf{e_2}\times\mathbf{R}_5)}\geq 0,\\
\rho_3 &= -\frac{\mathbf{e_1}(\mathbf{e}_5\times\mathbf{R}_3)\rho_1\rho_5+\mathbf{e_1}(\mathbf{R}_3\times\mathbf{R}_5)\rho_1-\mathbf{R_1}(\mathbf{e}_5\times\mathbf{R}_3)\rho_5-\mathbf{R_1}(\mathbf{R}_3\times\mathbf{R}_5)}{\mathbf{e_1}(\mathbf{e}_3\times\mathbf{R}_5)\rho_1\rho_5-\mathbf{e_1}(\mathbf{e}_3\times\mathbf{R}_5)\rho_1-\mathbf{R_1}(\mathbf{e}_3\times\mathbf{e}_5)\rho_5+\mathbf{R_1}(\mathbf{e}_3\times\mathbf{R}_5)}\geq 0,\\
\rho_4 &= -\frac{\mathbf{e_1}(\mathbf{e}_5\times\mathbf{R}_4)\rho_1\rho_5+\mathbf{e_1}(\mathbf{R}_4\times\mathbf{R}_5)\rho_1-\mathbf{R_1}(\mathbf{e}_5\times\mathbf{R}_4)\rho_5-\mathbf{R_1}(\mathbf{R}_4\times\mathbf{R}_5)}{\mathbf{e_1}(\mathbf{e}_4\times\mathbf{R}_5)\rho_1\rho_5-\mathbf{e_1}(\mathbf{e}_4\times\mathbf{R}_5)\rho_1-\mathbf{R_1}(\mathbf{e}_4\times\mathbf{e}_5)\rho_5+\mathbf{R_1}(\mathbf{e}_4\times\mathbf{R}_5)}\geq 0.
\end{aligned}\right\} \quad (5)$$

$$r_k = \frac{p}{1+e\cos\theta_k}. \quad (6)$$

$$p = \frac{r_1\left|\mathbf{r_3}\times\mathbf{r}_5\right| - r_3\left|\mathbf{r_1}\times\mathbf{r_5}\right| + r_5\left|\mathbf{r_1}\times\mathbf{r_3}\right|}{\left|\mathbf{r_3}\times\mathbf{r_5}\right| - \left|\mathbf{r_1}\times\mathbf{r_5}\right| + \left|\mathbf{r_1}\times\mathbf{r_3}\right|}. \quad (7)$$

$$\mathbf{e} = \frac{(p-r_1)\mathbf{r}_5-(p-r_5)\mathbf{r_1}}{\left|\mathbf{r_1}\times\mathbf{r}_5\right|}. \quad (8)$$

Геометрический метод (окончание)

$$\left.\begin{aligned} r_2 &= \frac{p}{1+e\cos\theta_2}, \\ r_4 &= \frac{p}{1+e\cos\theta_4}. \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

$$\left.\begin{aligned} &\left[(p-r_1)(\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2)-(p-r_2)r_1^2\right]^2-\left(r_1^2r_2^2-(\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2)^2\right)\left(e^2r_1^2-(p-r_1)^2\right)=0, \\ &\left[(p-r_5)(\mathbf{r}_4\mathbf{r}_5)-(p-r_4)r_5^2\right]^2-\left(r_4^2r_5^2-(\mathbf{r}_4\mathbf{r}_5)^2\right)\left(e^2r_5^2-(p-r_5)^2\right)=0, \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

$$\left.\begin{aligned} f_1(\rho_1,\rho_5)&=0, \\ f_2(\rho_1,\rho_5)&=0. \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

Пример 1. (1) Церера (неполный оборот)

Таблица 1. Наблюдения малой планеты (1) Церера

t (UT)	α (2000)	δ (2000)	Обсерватория
1989 10 06.266992	06 13 08.139	+21 29 27.47	La Palma
1989 10 23.178495	06 21 40.311	+22 06 38.20	Bordeaux-Floirac
1989 11 11.126524	06 22 20.900	+23 04 24.88	Bordeaux-Floirac
1989 11 28.075100	06 14 05.604	+24 11 27.34	Bordeaux-Floirac
1989 12 16.062520	05 57 47.979	+25 27 46.16	La Palma

Таблица 2. Значения ρ_1, ρ_3 и ρ_5 полученные для орбиты Цереры по методу Гаусса

ρ_1 (a.e.)	ρ_3 (a.e.)	ρ_5 (a.e.)
2.264738610	0.257548879	1.64017180

Таблица 3. Элементы орбит Цереры, полученные по методу Гаусса

M_0 (°)	a (a.e.)	e	i (°)	ω (°)	Ω (°)
296.20961	2.769085	0.07791	10.60717	71.10815	80.70306

Пример 1. (продолжение)

Таблица 4. Представление наблюдений (O-C) эллиптической орбитой малой планеты (1) Церера, полученной по методу Гаусса

Наблюдение	Δα (")	Δδ (")
«1»	$3.07\ 10^{-8}$	$-5.77\ 10^{-10}$
«2»	0.36	1.75
«3»	$2.20\ 10^{-8}$	$-7.63\ 10^{-10}$
«4»	-0.63	-3.33
«5»	$-2.21\ 10^{-7}$	$8.45\ 10^{-10}$

Пример 1 (продолжение)

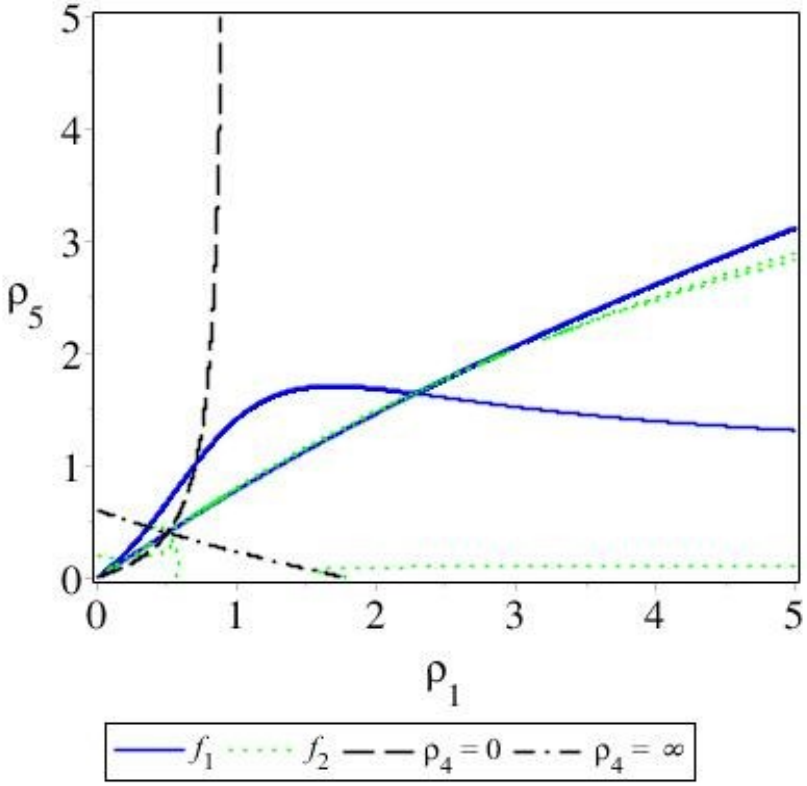


Рис. 1

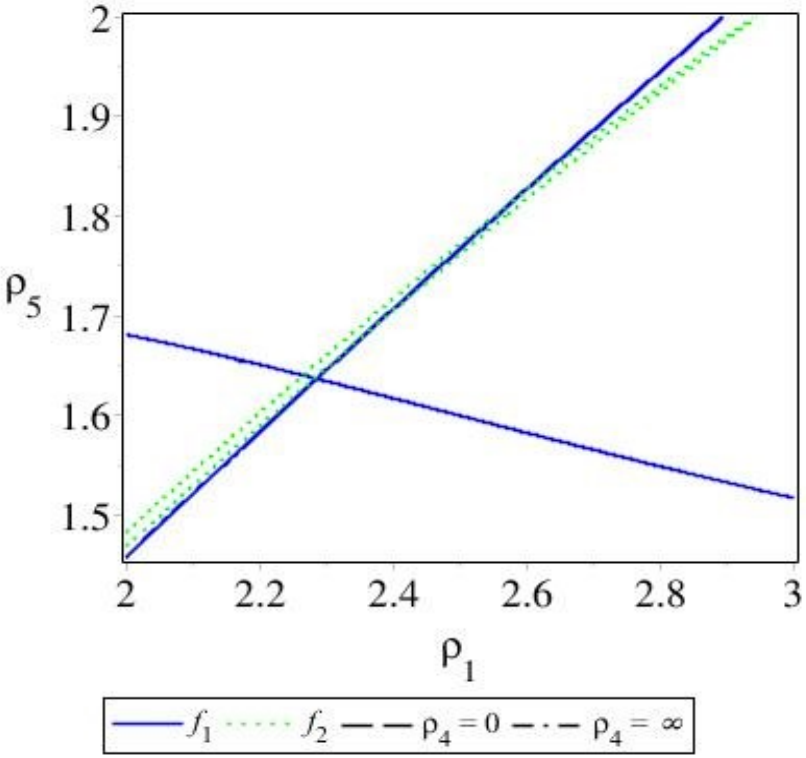


Рис. 2

Пример 1 (продолжение)

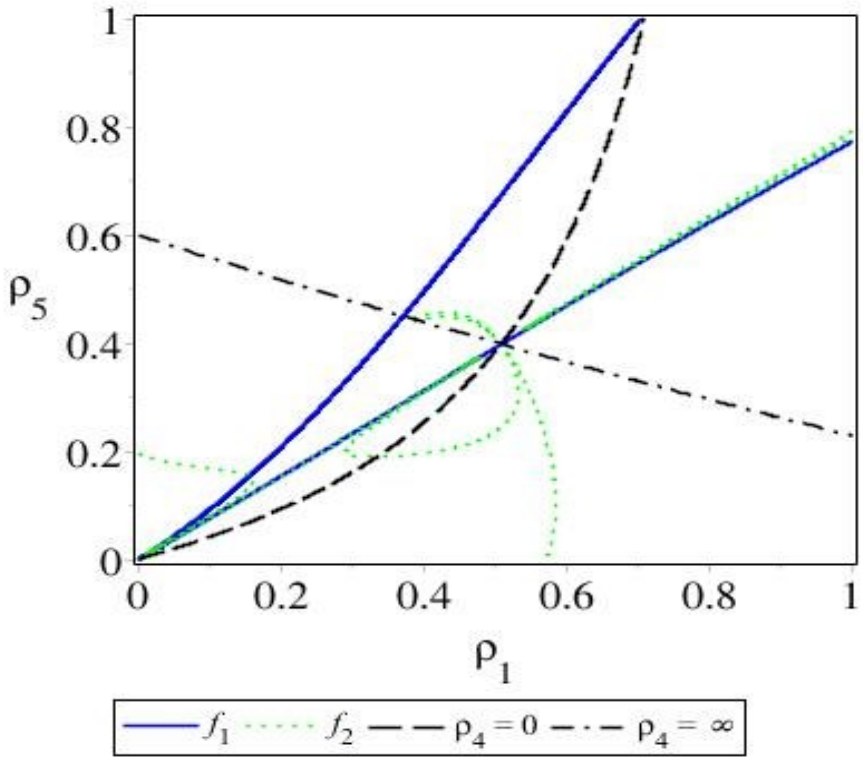


Рис. 3

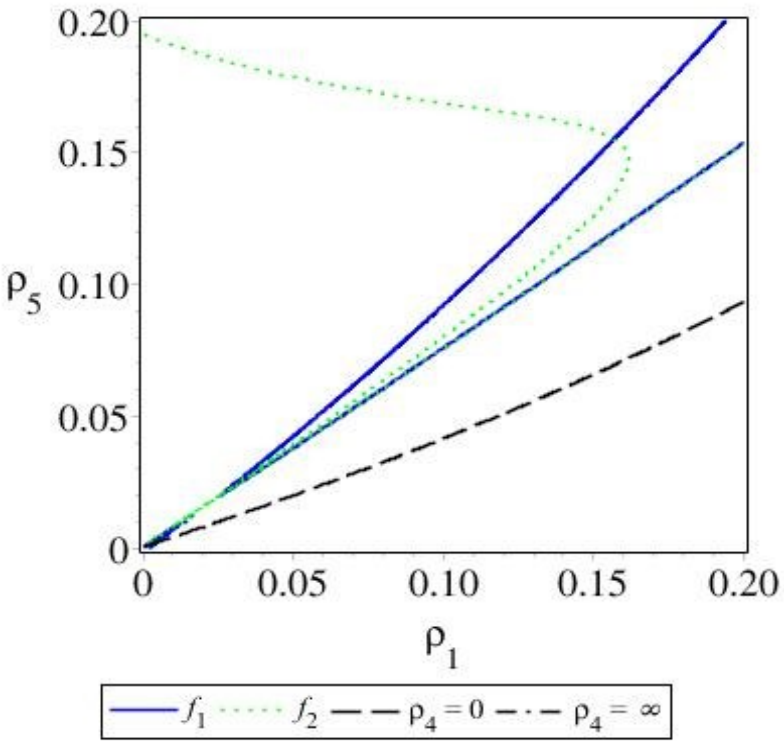


Рис. 4

Пример 1 (продолжение)

Таблица 5. Значения ρ_1 и ρ_5 полученные из (10), а также ρ_2 ρ_3, и ρ_4 полученные из (5), для различных орбит

Орбита	ρ_1 (а.е.)	ρ_2 (а.е.)	ρ_3 (а.е.)	ρ_4 (а.е.)	ρ_5 (а.е.)
«1»	2.264738610	2.053718897	0.257548879	1.701479291	1.64017180
«2»	2.282017983	2.068245498	1.856203872	1.714693629	1.637249371
«3»	2.582128670	2.310753373	2.055597516	1.889997769	1.816851667
«4»	2.360022749	2.132004809	1.909125917	1.761645444	1.682480509
«5»	0.381285669	0.365425749	0.339219430	0.315896982	0.297114895
«6»	0.047113458	0.045133578	0.041224045	0.037881966	0.035478754
«7»	0.156881889	0.139017766	0.080156843	0.239553543	0.155116646
«8»	0.029378293	0.027616092	0.020871738	0.026414323	0.023471875
«9»	0.020341673	0.019585094	0.017594765	0.016250660	0.015467882

Пример 1. (продолжение)

Таблица 6. Элементы орбит Цереры, полученные по геометрическому методу, а также для эллиптической орбиты ИПА

Орбита	T_0 (дата)/M_0 (°)	a (а.е.)	e	i (°)	ω (°)	Ω (°)
«1»	1989 11 14.33	-0.827589	4.14565	10.08768	359.7607	80.37591
«2»	192.66033	2.2035654	0.20107	10.17898	170.35511	80.44420
«3»	1990 01 16.66	0.5100676	4.48506	11.93817	186.88718	81.41038
«4»	302.82536	2.8030878	0.08417	10.62614	64.715938	80.71425
«5»	145.79936	0.9998173	0.28175	1.255274	197.84870	63.40398
«6»	86.74667	0.9933819	0.02726	0.142610	195.23030	54.09828
«7»	10.81369	1.5228894	0.32136	0.538962	339.28005	53.99319
«8»	11.37135	1.0149930	0.01048	0.090988	346.44841	51.99257
«9»	218.58808	0.9980124	0.00544	0.061740	49.090562	52.14089
ИПА	296.18127	2.7689402	0.07793	10.60656	71.143962	80.70253

Пример 1. (продолжение)

Таблица 7. Представление наблюдений (O-C) решением «4», полученным геометрическим методом, для малой планеты (1) Церера

Наблюдение	Δα (")	Δδ (")
«1»	0.0	$2.89\ 10^{-10}$
«2»	5.99	1.45
«3»	7.03	1.49
«4»	4.29	0.80
«5»	$2.06\ 10^{-10}$	$3.92\ 10^{-10}$

Пример 2. (1) Церера – многооборотный случай

Таблица 8. Наблюдения малой планеты Церера

t (UT)	α (2000)	δ (2000)	Обсерватория
1989 10 06.266992	06 13 08.139	+21 29 27.47	La Palma
1992 05 31.232804	21 00 00.755	−24 36 57.21	La Palma
1994 11 21.278624	09 30 07.871	+22 19 50.04	La Palma
1997 08 31.324468	22 57 53.475	−23 24 47.65	Table Mountain Observatory, Wrightwood
1999 12 15.514838	12 17 24.546	+09 42 18.90	Table Mountain Observatory, Wrightwood

Таблица 9. Значения ρ_1, ρ_3 и ρ_5 полученные для орбиты Цереры по методу Гаусса

ρ_1 (a.e.)	ρ_3 (a.e.)	ρ_5 (a.e.)
5.330736303	9.882979071	7.288261405

Пример 2. (продолжение)

Таблица 10. Элементы орбит Цереры, полученные по методу Гаусса

M_0 (°)	a (a.e.)	e	i (°)	ω (°)	Ω (°)
168.37084	6.071912	0.67127	10.87438	136.66421	80.70306

Таблица 11. Представление наблюдений (O-C) эллиптической орбитой малой планеты (1) Церера, полученной по методу Гаусса

Наблюдение	Δα (")	Δδ (")
«1»	$-2.06\ 10^{-10}$	$-1.65\ 10^{-10}$
«2»	920191.08	26557.87
«3»	$-6.18\ 10^{-10}$	$8.25\ 10^{-11}$
«4»	–	–
«5»	$-2.06\ 10^{-10}$	$1.44\ 10^{-10}$

Пример 2. (продолжение)

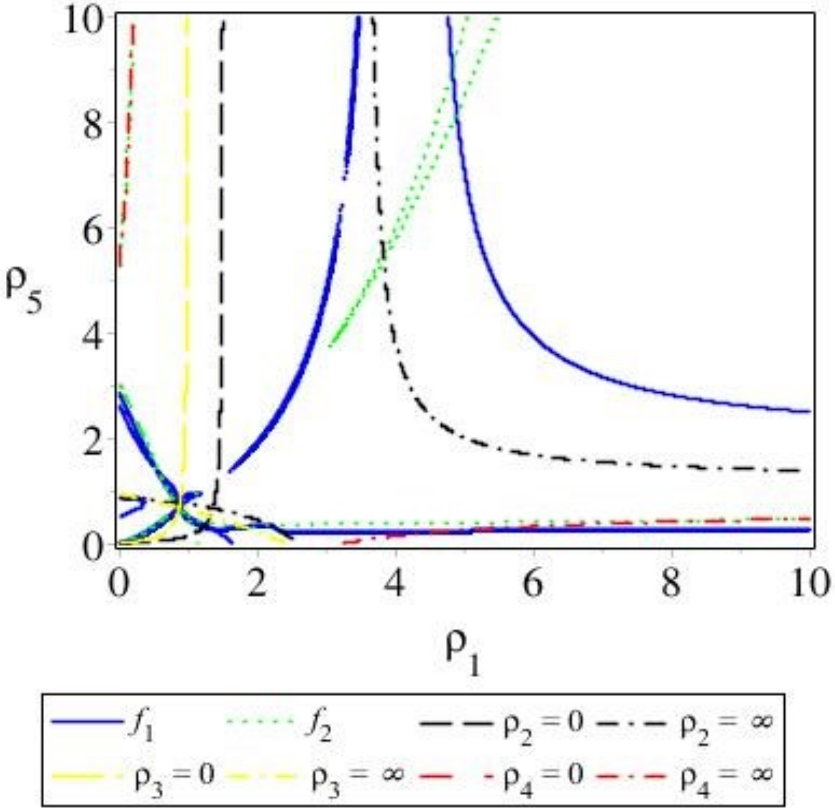


Рис. 5

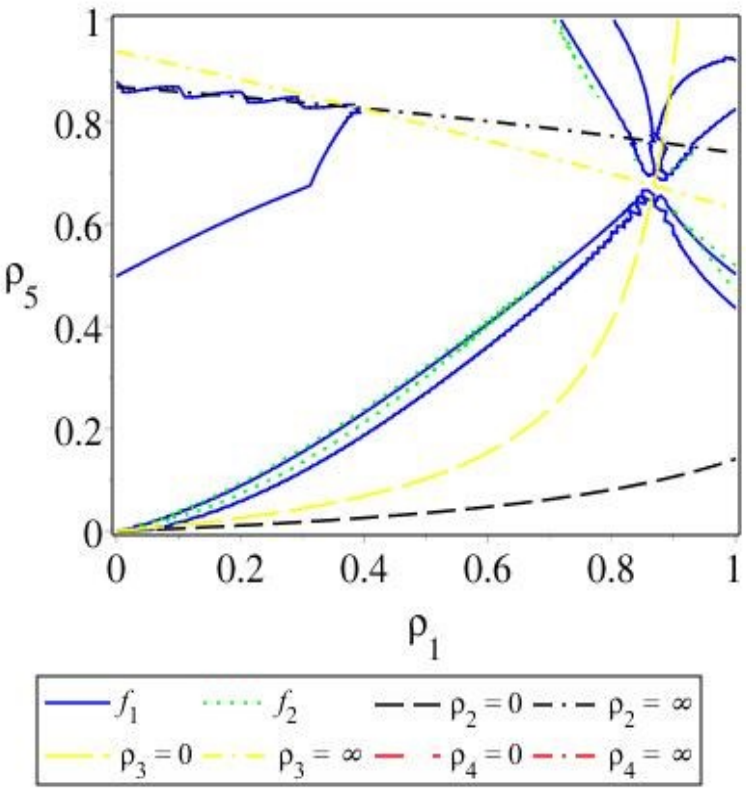


Рис. 6

Пример 2 (продолжение)

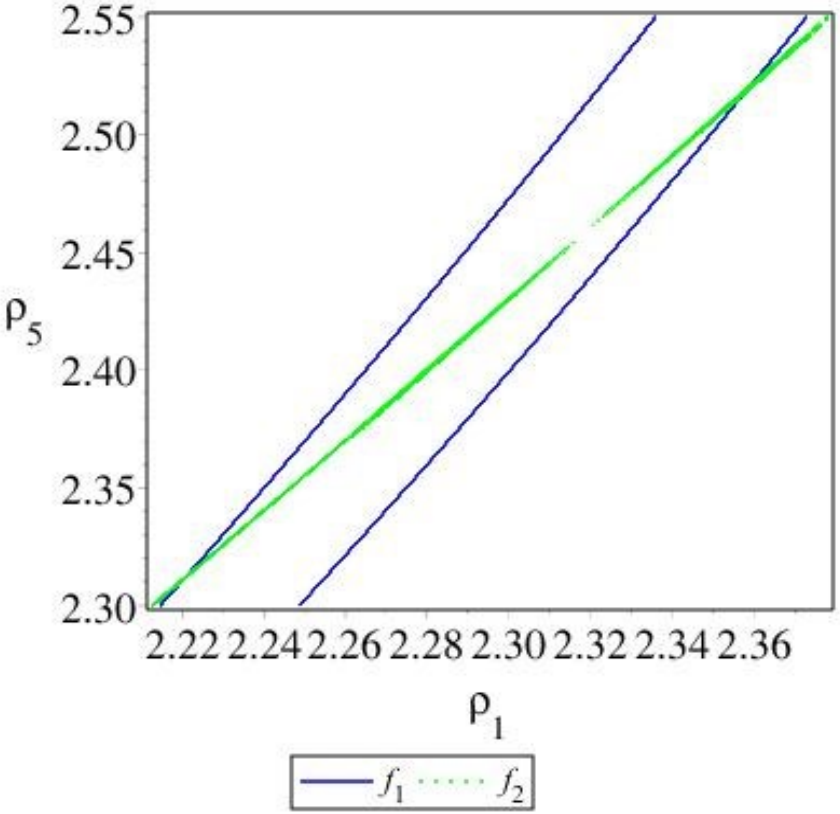


Рис. 7

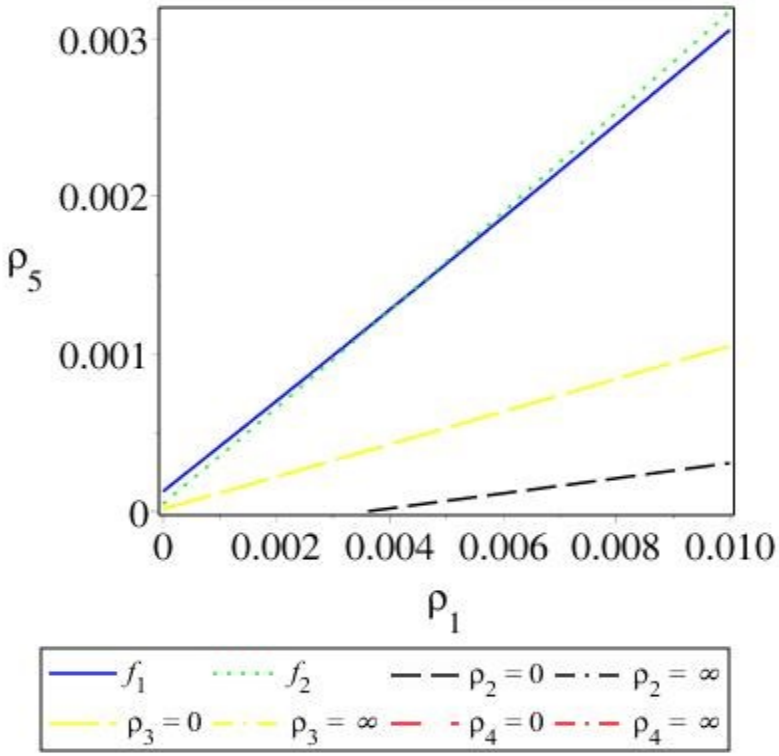


Рис. 8

Пример 2 (продолжение)

Таблица 12. Значения ρ_1 и ρ_5 полученные из (10), а также ρ_2, ρ_3 и ρ_4 полученные из (5), для различных орбит

Орбита	ρ_1 (а.е.)	ρ_2 (а.е.)	ρ_3 (а.е.)	ρ_4 (а.е.)	ρ_5 (а.е.)
«1»	2.359011815	2.326335938	2.234807299	2.001503827	2.520383763
«2»	2.221309698	1.882630278	2.045542528	1.990182829	2.312992877
«3»	0.004214482	0.001763968	0.001009866	0.001214393	0.001343196
«4»	2.358577267	2.324856590	2.234212687	2.001472785	2.519462800
«5»	2.220098401	1.879141983	2.043980353	1.990001874	2.310629003

Таблица 13. Элементы орбит Цереры, полученные по геометрическому методу, а также для эллиптической орбиты ИПА

Орбита	T_0 (дата)/M_0 (°)	a (а.е.)	e	i (°)	ω (°)	Ω (°)
«1»	154.48572	2.7909318	0.07241	10.59678	63.785529	80.73121
«2»	334.09604	2.6904669	0.10817	10.52824	66.822989	79.58010
«3»	316.17463	1.0004820	0.01748	0.020289	70.110477	34.06708
«4»	335.40516	2.7899879	0.07237	10.59657	63.928661	80.72776
«5»	333.85369	2.6878630	0.10804	10.52749	274.89428	79.56955
ИПА	328.90748	2.7673307	0.07613	10.60063	71.42797	80.65820

Выводы

1. Геометрический метод может быть использован на неограниченных интервалах времени между наблюдениями и позволяет определять орбиту тела из одной системы уравнений на нескольких оборотах вокруг центра притяжения;
2. К недостаткам метода следует отнести привлечение дополнительных (четвёртого и пятого) наблюдений и его неприменимость при наблюдениях объектов движущихся вблизи плоскости эклиптики.

Спасибо за внимание !