

Числа Лява для неупругой вращающейся Земли

© Е. А. Спиридонов, О. Ю. Виноградова

ИФЗ РАН, г. Москва, Россия

Для высокоточной обработки современных ГНСС наблюдений необходимо, в частности, знание теоретических значений приливных чисел h и l с относительной погрешностью не хуже 10^{-4} . Это позволяет на современном уровне прогнозировать вертикальные и горизонтальные смещения земной поверхности.

В работе значения чисел Лява получены для 12 различных вариантов моделей. Для этого проведено обобщение задачи М. С. Молоденского на случай вращающейся неупругой ассиметричной Земли. В систему уравнений шестого порядка включены поправки за относительные и кориолисовы ускорения [1, 2]. Рассчитанные числа Лява второго порядка определены с учетом их широтной зависимости.

Нормировка полученных значений чисел Лява соответствует Соглашениям IERS [3]. Проведено их сравнение с результатами широко известных работ других авторов [4, 5]. В ближайшее время полученные результаты планируется применить в программе прогноза параметров земных приливов ATLANTIDA3.1_2017 [1, 6].

Ключевые слова: приливные числа Лява, земные приливы, смещения земной поверхности, прогноз земных приливов.

Введение

Целью настоящей работы является демонстрация некоторых новых возможностей расчета амплитудных факторов и чисел Лява, необходимых для моделирования земных приливов, а также смещений земной поверхности. Для достижения поставленной цели проведено обобщение известной задачи М. С. Молоденского для случая ассиметричной вращающейся Земли [1, 4].

Главной отличительной особенностью настоящей работы является то, что решение задачи для ассиметричной Земли осуществлено методом Лява без применения процедуры отсечения. В большей части работ других авторов это не так.

Решение задачи методом Лява столкнулось с некоторыми трудностями. В частности, пришлось поменять сам вид искомого решения. Второй проблемой являются полученные различия значений чисел Лява в широтном и долготном направлениях. Однако выяснилось, что они достаточно малы. Нако-

нец, третья проблема связана с введением в уравнения кориолисовых ускорений, поскольку это снимает в уравнениях вырождение по угловым переменным, и они уже не сводятся к обыкновенным. Однако в [1] эта проблема также была решена.

Основные численные результаты

Для облегчения восприятия различий между полученными в работе 12 моделями их основные отличительные особенности сведены в первые 8 столбцов табл. 1, в которой представлены исследуемые значения для полусуточных волн. Первый столбец («Модель») содержит номер модели. Для сравнения сюда также включены гидростатическая (DDW/H) и негидростатическая (DDW/NH) модели из работы [4], а также результаты из работы [5]. Второй столбец («Модель строения Земли») содержит краткое указание на применяемый вариант модели строения Земли. Практически все результаты получены для эллипсоидальной Земли, за исключением Модели 1. Эту позицию фиксирует третий столбец таблицы («Форма»).

В последующих двух столбцах отмечено присутствие или отсутствие (+ или –) центробежной силы (столбец «Центробежн.»), а также относительных и кориолисовых ускорений (столбец «Кориолис»).

Шестой столбец («тау») показывает включение или выключение обсуждаемого в работе [1] напряжения, содержащего функцию τ . Это напряжение выделено отдельно, поскольку явно не содержится в цитируемых здесь работах других авторов. В седьмом столбце (H/NH) показан тип модели с точки зрения ее гидростатичности (гидростатическая, негидростатическая). Наконец, в последних двух столбцах указаны: применяемая при расчетах функция крипа (столбец «Крип. ф.»), а также период (T), на который пересчитаны упругие модули модели. Символы \log и α обозначают логарифмическую и степенную функции крипа соответственно. В последующих 8 столбцах приведены значения коэффициентов, входящих в формулы, предназначенные для описания широтных зависимостей чисел Лява и амплитудных дельта-факторов. Для чисел Лява h и l , а также дельта-факторов, применены формулы (1) и (2) соответственно для полусуточных и суточных волн, а для числа k – формула (3) [4].

$$F = F_0 + F^+ \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} (7 \cos^2 \Theta - 1), \quad (1)$$

$$F = F_0 + F^+ \cdot \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} (7 \cos^2 \Theta - 3), \quad (2)$$

$$k = k + k^+ \cdot P_2, \quad (3)$$

где F_0 и F^+ — средние значения и амплитуда широтной зависимости для каждого из чисел, Θ — коширота, $P_2 = \frac{1}{2}(3\cos^2 \Theta - 1)$ Обсудим прежде всего результаты, полученные для полусуточных волн (табл. 1).

Таблица 1 (начало)

Числа Лява и амплитудные дельта-факторы полусуточных волн

№	Модель	Модель строения Земли	Форма	Центробежн.	Кориолис	τ_{au}	H/NH	Крип. ф.
1	Модель 1	PREM+1066A	сфера	–	–	–	H	–
2	Модель 2	PREM+1066A	эллипс	–	–	–	H	–
3	Модель 3	PREM+1066A	эллипс	+	–	–	H	–
4	Модель 4	PREM+1066A	эллипс	+	–	–	H	log
5	Модель 5	PREM+1066A	эллипс	+	+	–	H	log
6	DDW/H	PREM+1066A	эллипс	+	+	–	H	log
7	Модель 5a	PREM+1066A	эллипс	+	+	–	H	log
8	Модель 6	PREM+1066A	эллипс	+	+	+	H	log
9	Модель 7	PREM+1066A	эллипс	+	+	+	NH	log
10	Модель 8	PREM+1066A	эллипс	+	+	+	NH	log
11	Модель 9	PREM+IASP91	эллипс	+	+	+	NH	log
12	Mathews	PREM	эллипс	+	+	–	NH	alfa
13	Модель 10	PREM+1066A	эллипс	+	+	–	NH	alfa
14	Модель 11	PREM+1066A	эллипс	+	+	+	NH	alfa
15	Модель 12	PREM+IASP91	эллипс	+	+	+	NH	alfa
16	DDW/NH	PREM+1066A	эллипс	+	+	–	NH	alfa

Модель 1 построена для сферической упругой невращающейся гидростатически уравновешенной Земли. Применена модель строения Земли *PREM*, океанический слой которой, как и в работе [4], заменен двумя слоями модели 1066A. При построении этой модели в уравнениях были занулены все слагаемые, отвечающие за зависимость чисел Лява от широты.

Модель 2 отличается от Модели 1 введением эллиптичности (без центробежной силы). При этом появляется достаточно резкая зависимость чисел Лява и амплитудного фактора от широты. Значения чисел h и k достаточно быстро нарастают от полюса к экватору, а значения числа Лява l и дельта-фактора, наоборот, падают.

Таблица 1 (продолжение 1)

Числа Лява и амплитудные дельта-факторы полусуточных волн

№	T	h	h^+	k	k^+
1	1s	0.59796	0.00000	0.29734	0.00000
2	1s	0.59854	-0.00050	0.29734	-0.00362
3	1s	0.59778	-0.00035	0.29478	-0.00104
4	200s	0.60134	-0.00036	0.29752	-0.00105
5	200s	0.60183	-0.00013	0.29719	-0.00066
6	300s	0.60189	-0.00012	0.29751	-0.00057
7	300s	0.60211	-0.00013	0.29735	-0.00066
8	200s	0.60175	-0.00006	0.29719	-0.00054
9	200s	0.60175	-0.00007	0.29719	-0.00056
10	12h	0.60547	-0.00007	0.29933	-0.00056
11	12h	0.60630	-0.00006	0.29948	-0.00052
12	12h	0.60689	-0.00015	0.29954	-0.00080
13	12h	0.60817	-0.00014	0.30048	-0.00069
14	12h	0.60811	-0.00007	0.30051	-0.00056
15	12h	0.60873	-0.00006	0.30055	-0.00054
16	12H	0.61056	-0.00012	0.30235	-0.00058

Введение центробежной силы, прежде всего, существенно снижает скорость изменения с широтой значений чисел Лява h и k , а также дельта-фактора. Включению в рассмотрение этой силы соответствует Модель 3. Так по сравнению с Моделью 2, перепад значений между полюсом и экватором в Модели 3 уменьшается для чисел h и k в 1.4 и 3.5 раза соответственно, а для дельта-фактора почти в 26 раз, т. е. значения последнего практически перестают зависеть от широты. Скорость изменения с широтой числа l при переходе от Модели 2 к Модели 3, наоборот, нарастает почти в два раза.

Модель 4 отличается от Модели 3 только тем, что результаты здесь получены для референц-периода 200 с. Переход от 1 с к 200 с практически не меняет вида широтных зависимостей чисел Лява и дельта-фактора (значения h^+ , k^+ , l^+ и δ^+ в табл. 1 остаются практически неизменными), однако значимо меняет их средние значения. Средние значения чисел h , k и l увеличиваются на 0.0036 (0.6 %), 0.0027 (0.9 %) и 0.0010 (1.2 %) соответственно. Меньше всего изменяется значение дельта-фактора. Оно увеличивается всего на 0.0005 (или 0.04 %). Таким образом, наибольшие изменения касаются чисел k и l .

Таблица 1 (продолжение 2)

Числа Лява и амплитудные дельта-факторы полусуточных волн

№	l	l^+	δ	δ^+
1	0.08303	0.00000	1.15632	0.00000
2	0.08296	0.00006	1.15535	0.00084
3	0.08284	0.00010	1.15956	0.00003
4	0.08386	0.00011	1.16006	0.00003
5	0.08385	0.00009	1.16018	0.00011
6	0.08391	0.00001	1.16030	0.00007
7	0.08392	0.00009	1.16022	0.00011
8	0.08385	0.00009	1.16015	0.00014
9	0.08385	0.00009	1.16015	0.00014
10	0.08481	0.00009	1.16068	0.00014
11	0.08470	0.00009	1.16132	0.00014
12	0.08505	-0.00008	-	-
13	0.08505	0.00009	1.16162	0.00011
14	0.08505	0.00009	1.16157	0.00014
15	0.08496	0.00009	1.16214	0.00014
16	0.08608	0.00001	1.16172	0.00010

После добавления к результатам Модели 4 поправок за относительные и кориолисовы ускорения получаем Модель 5. При переходе от Модели 4 к Модели 5 значения чисел Лява и дельта-фактора полусуточных волн изменяются на единицы в четвертом знаке после запятой. Среднее значение числа h увеличивается на 0.00049 (0.08 %), а числа k , наоборот, падает на 0.00033 (0.11 %). Число l остается практически неизменным, символически уменьшаясь на 0.00001 (0.02 %), а средняя величина дельта-фактора возрастает на 0.00012 (0.01 %). При этом в Модели 5 значительно уменьшаются модули амплитуд широтных зависимостей чисел Лява (h^+ , k^+ , l^+), а модуль δ^+ , наоборот, возрастает. В результате, в Модели 5, в сравнении с Моделью 4, перепад значений чисел Лява h , k и l между полюсом и экватором уменьшается в 2.7, 1.6 и 1.2 раза соответственно, а аналогичный перепад дельта фактора возрастает в 3.8 раза. Таким образом, введение поправок за относительные и кориолисовы ускорения приводят в основном к изменению скорости роста широтных кривых.

Следует отметить, что результаты Модели 5 очень близки к результатам модели DDW/H . Так отличия средних значений чисел Лява h и l , полученных в указанных двух моделях, отличаются всего на 0.00006 (значения модели DDW/H больше наших на 0.01 % и 0.08 % соответственно). Несколько больше отличия значений числа k (0.00032 или 0.1 %). Дельта-факторы отличаются на

0.00012 (0.01 %). Несколько в большей степени отличаются широтные зависимости двух сравниваемых моделей.

Как указано в работе [4], значения чисел Лява моделей DDW/H и DDW/NH приведены для референц-периодов 300 с. В связи с этим была рассмотрена дополнительная Модель 5а, которая отличается от Модели 5 только величиной периода (табл. 1). При переходе к этой модели отличия значений числа k и дельта фактора δ от модели DDW/H уменьшаются по сравнению с Моделью 5 в 2.0 и 1.5 раза соответственно и составляют по абсолютной величине 0.00016 (0.05 %) и 0.00008 (0.01 %). Отличия для числа l являются символическими (всего 0.00001 или 0.01 %). В то же время почти в 3.7 раза дальше от DDW/H становится значение числа h (0.00022 или 0.04 %). Амплитуды широтных зависимостей двух наших Моделей 5 и 5а (h^+ , k^+ , l^+ и δ^+) не отличаются друг от друга.

В Модели 6 мы опять возвращаемся к референц-периоду 200 с Модели 5, дополнительно учитывая упомянутое выше напряжение, содержащее функцию τ . Эта добавка совершенно не влияет на среднее значение и амплитуду широтной зависимости числа l , т. е. значения чисел l и l^+ Моделей 5 и 6 не отличаются друг от друга. Также не меняется по абсолютной величине среднее значение числа k . Однако величина k^+ в Модели 6 несколько меньше по модулю, чем в Модели 5, (-0.00054 против -0.00066) и ближе к аналогичному значению модели DDW/H (-0.00057). Среднее значение числа h уменьшается по сравнению с Моделью 5 на 0.00008 (0.01 %). При этом величина h^+ , отвечающая за изменение числа h с широтой, уменьшается почти в два раза. Величина δ при переходе от Модели 5 к Модели 6 уменьшается всего на 0.00003, а δ^+ — в 1.2 раза. Таким образом, наибольшие изменения, связанные с введением напряжения, содержащего функцию δ , претерпевает число h . Величина h и особенно h^+ удаляются при этом от результатов модели DDW/H .

В Модели 7 дополнительно учтено негидростатическое поведение оболочки. Эта модель отличается от Модели 6 профилем сжатия. Из сравнения результатов Моделей 6 и 7 видно, что они полностью идентичны за исключением символического изменения величины k^+ . Таким образом, учет негидростатичности не оказывает практически никакого влияния на результаты, полученные для полусуточных волн.

Обсудим теперь результаты, полученные для полусуточных волн с учетом диссипации.

Модель 8 отличается от Модели 7 значением периода, который составляет 12 ч. Пересчет осуществлялся при помощи логарифмической функции крипа. Учет диссипации приводит к существенному росту всех трех средних значений чисел Лява и дельта-фактора. Так числа k , h и l возрастают соответственно на 0.00371 (0.6 %), 0.00214 (0.7 %) и 0.00096 (1.1 %). Изменение дельта-фактора составило 0.00053 (0.05 %). Таким образом, введение диссипации в наибольшей степени влияет на число l .

Модель 9 отличается от Модели 8 тем, что в ней произведена замена верхних 760 км модели *PREM* моделью *IASP91*. В результате подобной замены средние значения чисел h и k в сравнении с Моделью 8 увеличились на 0.00084 (0.14 %) и 0.00015 (0.05 %) при почти неизменных амплитудах их широтных зависимостей h^+ , k^+ . Дельта-фактор δ вырос на (0.05 %), а значение числа l наоборот уменьшилось на 0.00010 (0.12 %). Таким образом, наиболее чувствительными к варьированию строения коры и верхней мантии являются числа h и k . К сказанному следует добавить, что именно по Модели 9 были получены наилучшие результаты при определении амплитудных дельта-факторов для неупругой вращающейся Земли с океаном в смысле их совпадения с наблюдаемыми значениями, полученными на сети GGP для территории Европы. Подробней об этих результатах см. [1].

Еще одной особенностью Модели 9 является то, что несмотря на различие применяемых функций крипа, полученные при помощи нее результаты оказались достаточно близки к таковым из работы [5]. Полученные в работе [5] средние значения чисел h , k и l больше значений Модели 9 на 0.00058 (0.10 %), 0.00006 (0.02 %) и 0.00035 (0.41 %) соответственно.

Модели 10–12 демонстрируют значения чисел Лява, рассчитанные для периода 12 часов с применением степенной функции крипа. Значения чисел Лява и дельта-факторов этих моделей занимают промежуточное положение между результатами Моделей 8, 9 и модели *DDW/NH*.

Соотношения между полученными в различных моделях значениями для суточных волн остаются теми же, что и для полусуточных волн.

Заключение

Из полученных в работе результатов можно сделать следующие выводы:

1. Как правило, наибольшей зависимостью от параметров модели обладают числа Лява h , k и l . Дельта-фактор изменяется в меньшей степени.

2. Наибольшее влияние на скорость изменения исследуемых значений чисел Лява и дельта-фактора с широтой оказывают такие факторы как: учет эллиптичности, центробежных и кориолисовых ускорений.

3. Тестовые Модели 5 и 5а, рассчитанные по варианту модели строения Земли, наиболее близкому к принятому в работе [4] для периодов 200 с и 300 с соответственно, показали хорошее совпадение полученных значений с результатами модели *DDW/H*. Отличия рассчитанных в Модели 5а значений чисел Лява h , k , и l от *DDW/H* составляют сотые доли процента.

4. Значения чисел Лява и дельта-факторов, полученные в Моделях 8 и 9 для периода 12 ч заметно отличаются от *DDW/NH*. В то же время результаты, полученные именно по этим моделям привели к наилучшему совпадению теоретических и экспериментальных результатов в отношении приливного дельта-фактора и будут применены автором для расчета смещений.

Работа выполнена в рамках государственного задания ИФЗ РАН.

Литература

1. Спиридонов Е. А. Амплитудные дельта-факторы и сдвиги фаз приливных волн для Земли с океаном // Геофизические процессы и биосфера. — М.: ИФЗ РАН, 2017. — Т. 16, № 2. — С. 5–54.
2. Спиридонов Е. А. Амплитудные дельта-факторы второго порядка и их зависимость от широты // Геология и геофизика. — Новосибирск: СО РАН, 2016. — Т. 4, № 4. — С. 796–807.
3. IERS Conventions (2010) / Petit G., Luzum B. // IERS Technical Note. — Frankfurt am Main, 2010. — Issue 36. — 179 p.
4. Dehant V., Defraigne P., Wahr J. M. Tides for a convective Earth // J. of Geophys. Res. — 1999. — Vol. 104, Issue B1. — P. 1035–1058.
5. Mathews P. M. Love numbers and gravimetric factor for diurnal tides // Proc. 14th Int. Symp. Earth Tides. J. Geod. Soc. — Jpn., 2001. — Vol. 47, № 1. — P. 231–236.
6. Spiridonov E., Vinogradova O., Boyarskiy E., Afanasyeva L. ATLANTIDA 3.1_2014 for Windows: A software for tidal prediction // Bull. Inf. Marées Terrestres. — Feb. 2015. — Issue 149. — P. 12063–12082.

Love Numbers for the Inelastic Rotating Earth

E. A. Spiridonov, O. Yu. Vinogradova

High-precision processing of modern GNSS observations makes it necessary to know theoretical values of the tidal numbers h and l with a better than 10^{-4} relative error. This allows us to predict vertical and horizontal displacements of the earth's surface with the contemporary accuracy.

The values of Love numbers are obtained in this paper for 12 different models. A generalization of the Mikhail Molodensky's problem to the case of a rotating inelastic asymmetric earth is made for this purpose. The system of equations of the sixth order includes corrections for relative and Coriolis accelerations [1, 2]. The calculated second-order Love numbers are determined taking into account their latitudinal dependence.

This normalization of the obtained values of Love numbers corresponds to the IERS Conventions [3]. Their comparison with the results of widely known works of other authors [4, 5] is made. The results are meant to be used soon in the tidal prediction program ATLANTIDA 3.1_2017 [1, 6].

Keywords: tidal Love numbers, earth tides, displacements of the earth's surface, tidal prediction.